

Spé PC2 : Révisions pour l'oral année 2008

Tous les exercices qui suivent ont été posés au concours en 2007 en filière PC (ou exceptionnellement PSI)
Pour chaque séance de TD vous devez préparer les 5 ou 6 exercices prévus de façon à pouvoir les exposer au tableau comme au concours.

Les exercices sont regroupés par thème selon l'exercice principal posé. Nous corrigerons à chaque fois la planche entière.

Les exercices doivent aussi vous donner l'occasion de revoir chaque partie du programme.

"Je ne trouve pas" veut dire "je révise le cours correspondant"

TD 1 : algèbre 1

1. (CCP)

- Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel et $u \in (\mathcal{L}E)$ tel qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = Id$
On se donne un sous espace vectoriel V stable par u et p une projection d'image V
On pose

$$q = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{n-k}$$

1. Montrer $x \in \text{Im}(p) \Leftrightarrow p(x) = x$
 2. Montrer que $q \circ u = u \circ q$
 3. Montrer $\text{Im}(q) \subset (V)$
 4. Montrer $p \circ q = q$
 5. Montrer que q est un projecteur
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + aX^n + b$

2. (CCP)

- Soient E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant : $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$
 1. Montrer : $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{0\}$ et $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(g) = F$
 2. Si E et F sont de dimensions finies, comparer $rg(f)$ et $rg(g)$
 3. On suppose $\dim(E) = \dim(F) = rg(f) = n$ montrer $g \circ f = Id$
 4. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$, $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$: $f : P \mapsto P'$, $g : P \mapsto \int_0^x P(t) dt$
Montrer que f et g vérifient les hypothèses de cet exercice;
- Nature de la courbe

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Equation de la tangente en un point (x_0, y_0) de la courbe

3. (CCP)

- Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note L_k l'ensemble des endomorphismes de E laissant invariant tous les sous espaces de dimensions k .
 1. déterminer L_0 et L_3
 2. Soit $u \in L_1$:
Montrer : $\forall x \in E, \exists l_x \in \mathbb{R} : u(x) = l_x x$
Montrer : $\exists l, \forall x \in E, u(x) = lx$
Déterminer L_1
 3. Montrer $L_2 \subset L_1$. En déduire L_2
- Nature de la série $\sum (-1)^n \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n dt$

4. (Navale)

1. Soit X et Y deux matrices lignes de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$
donner une condition nécessaire et suffisante sur X et Y pour que $M = {}^tXY$ soit diagonalisable.
2. Montrer une égalité série=intégrale mais je ne sais plus la quelle.

5. (CCP)

- Soient (a, b) deux réels avec $a < b$ et $n \in \mathbb{N}$. on pose $P_n(X) = (X - a)^n(X - b)^n$ et $Q_n(X) = \frac{1}{n!}P_n(X)^{(n)}$

1. Montrer que Q_n est un polynôme . Donner son degré et son coefficient dominant.
2. Déterminer des coefficients tels que

$$Q_n(X) = \sum_{k=0}^n \lambda_{k,n}(X - a)^k(X - b)^{n-k}$$

3. Calculer $Q_n(a), Q_n(b), \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

4. Calculer $\int_a^b Q_n(t)dt$. A l'aide d'intégrations par parties calculer $\int_a^b P_n(t)dt$

- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que, en dimension finie, un endomorphisme nilpotent soit diagonalisable.

TD2 : analyse 1 (suites séries)

1. (école de l'air) 30'+30'

1. Convergence et somme de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{t-1}{t+1} \right)^n$$

2. calculer le minimum pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de :

$$\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$$

on admettra que $(f/g) = \int_0^1 fg$ est un produit scalaire sur $C_0([0, 1], \mathbb{R})$

2. (CCP)

- 1. Montrer que le domaine de définition de

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp(-nx)}{n^2}$$

est \mathbb{R}^+

2. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^+ , C^2 sur \mathbb{R}^{+*}
3. Calculer f'' puis f' sur \mathbb{R}^{+*}
4. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : f(x) = f(0) + \int_0^x \ln(1 - e^{-t}) dt$$

- Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(p, q) \in \mathbb{C}^2$, pour que $P = X^3 + pX + q$ admette une racine double . Donner alors toutes les racines de P

3. (CCP)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^{\acute{e}}$ on pose

$$u_n(x, y) = \frac{x^n}{1 + y^{2n}}$$

et

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, y)$$

1. Montrer que si $|x| < 1$ $\sum u_n(x, y)$ converge absolument.

2. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (|u_n(x, y)|)$$

si $|x| \geq 1$ et $|y| < 1$

3. si $|x| > 1$ et $|y| > 1$, donner un équivalent de la suite u_n

4. Montrer que $\sum u_n(x)$ converge si et seulement si $(x, y) \in D$

$$D =]-1, 1[\times \mathbb{R} \cup ((x, y), 1 \leq |x| < y^2)$$

5. Justifier que D est ouvert.

6. Soit $(a, b) \in D$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ est-il défini ?

- Tracer la courbe paramétrée : $\begin{cases} x = 5t^4 \\ y = 4t^5 \end{cases}$

4. (CCP)

- Soit la suite définie par

$$u_0 = a, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = |u_n^2 - 1/4|$$

Convergence et limite éventuelle de la suite

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - A^2 = 0$ et $A^2 - A \neq 0$
Que peut-on dire du spectre de A ?
 A est-elle diagonalisable ?

5. (Centrale)

1. Montrer que les conditions :

$$x_0 = -2, \forall n \in \mathbb{N}^*, x_n < 0 \text{ et } x_n - x_n^2 = x_{n-1}$$

définissent une unique suite (x_n) de réels.

2. Montrer que la suite (x_n) converge et calculer sa limite.
3. Nature de la série $\sum x_n^2$ et $\sum \ln(1 + x_n^2)$

4. A l'aide de l'outil informatique calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + x_n^2)$

6. (Centrale)

- Soit f 2π périodique, égale à $\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$ sur $[-\pi, \pi]$

1. Vérifier (sans Maple) que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(nx)}{n^2}$

$$\text{Soit } g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(nx)}{n^2(n^2 + 1)}$$

2. Tracer le graphe de g avec Maple
 3. Montrer que g est C^2 sur \mathbb{R} et déterminer une équation différentielle simple vérifiée par g et faisant intervenir f .
 4. Calculer g sur $[-\pi, \pi]$
- Tracer la courbe d'équation polaire

$$r = \frac{1}{|\cos(\theta)| + |\sin(\theta)|}$$

TD3 géométrie 1 (plan)

1. (CCP)

- Soient $E = \mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé direct $0, i, j$ et $k > 0$
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on pose $u_\theta = \cos(\theta)i + \sin(\theta)j$ et $M_\theta = 0 + \exp(k\theta)u_\theta$

1. Déterminer un vecteur de la tangente à la courbe , puis une équation cartésienne de cette tangente.
2. même question pour la normale
3. donner le repère de Frenet et la courbure de la courbe

- Nature de la série $\sum \frac{n!}{a^n}$, $a > 0$

2. (CCP)

- Tracer la courbe paramétrée : $\begin{cases} x = \frac{t-1}{t} \\ y = \frac{t}{t+1} \end{cases}$

- Soient A et B fixées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Résoudre : $X = Tr(X)A + B$

3. (CCP)

- Soit $a > 0$

1. Tracer la courbe ensemble des points $P = 0 + t\vec{i} + at^2\vec{j}$

2. Déterminer l'équation de la tangente et de la normale au point de paramètre t_0

3. factoriser $P(X) = X^3 - (t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2)X + (t_1t_2^2 + t_1^2t_2)$

4. Montrer que les normales en trois points distincts de P sont concourantes ssi leur centre de gravité est sur l'axe de symétrie.

- Montrer que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$$

est continue sur \mathbb{R}

4. (ENSAIT) On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct (O, i, j)

Tracé de la courbe :

$$\begin{cases} x(t) = t - \text{th}(t) \\ y(t) = \frac{1}{\text{ch}(t)} \end{cases}$$

1. Précisez les variations de $x(t)$ et $y(t)$

2. Déterminez le point stationnaire et calculez la tangente en ce point.

3. Etudiez les branches infinies.

4. Tracez le graphe

5. Précisez le repère de Frenet et la courbure en tout point de paramètre $t > 0$.

5. (Mines)

- Soit Γ une courbe plane ne passant pas par O . En tout $M \in \Gamma$ la normale en M à Γ et la perpendiculaire en O à OM se coupe en P .

Déterminer les courbes Γ telles que la longueur OP soit constante.

Donner l'allure du graphe de Γ

- Soit $f(x) = \int_1^x \frac{\exp(t)}{t} dt$. Etudier la limite de f si x tend vers 0^+ , si x tend vers $+\infty$. Donner un équivalent de f en 0^+ .

TD4 algèbre 2 (réduction)

1. (ENSEA)

- Valeurs propres et vecteurs propres de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

M est-elle diagonalisable ? Que vaut $\det(M)$

- Rayon de convergence et somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n)x^n$

2. (CCP) Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$

On se donne un polynôme fixé A de degré $d \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Soit q et r les applications de E dans E qui à tout polynôme P associent $q(P)$ et $r(P)$, le quotient et le reste de la division euclidienne de P par A

1. Montrer que q et r sont des endomorphismes de E
2. déterminer leur noyaux et leurs images
3. calculer $q \circ r$ et $r \circ r$
4. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $q^m = 0$, et déterminer le plus petit m solution.
5. q et r sont-ils diagonalisables ?

3. (CCP)

- Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$ muni de la base canonique $B = (X^j)_{j=0}^n$

On définit les deux applications :

- $f : P \mapsto P'$
 $F : F$ est linéaire et $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $F(X^k) = X^{n-k}$

1. Déterminer la matrice dans la base B de f , et celle de F .
2. f est-elle diagonalisable ?
3. calculer F^2 . F est-elle diagonalisable ?
4. soit $g = F \circ f \circ F + f$. donner la matrice de g
 Montrer $\forall P \in E$, $g(P) = nXP - (X^2 - 1)P'$
5. Soit $P_k = (X - 1)^k (X + 1)^{n-k}$, montrer que pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, P_k est vecteur propre de g .
6. g est-elle diagonalisable ?

- : Soit la suite : $u_0 = a, u_1 = b, \forall n \in \mathbb{N} u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} \cdot u_n}$. Calculer u_n en fonction de n

4. (CCP 2006)

- Soient a_1 et a_2 deux complexes non nuls. et a_3 un complexe. On pose

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau de M , son rang, son polynôme caractéristique.
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si :

$$4a_1^2 + 4a_2^2 + a_3^2 \neq 0 \text{ et } a_1^2 + a_2^2 \neq 0$$

3. Etudier le cas $a_1^2 + a_2^2 = 0$

- Dérivée n -ème de $e^x \cos(x)$

5. (Mines)

- Soit $u : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \\ P \rightarrow nXP + (1 - X^2)P' \end{cases}$
Montrer que P est un endomorphisme diagonalisable.
- Nature de la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$$

6. (Centrale)

- Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB - BA = B$
 1. Montrer que $Tr(MN) = Tr(NM)$, en déduire que B n'est pas inversible.
 2. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $AB^k - B^kA = kB^k$
 3. En déduire, en utilisant un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que B est nilpotente.
- Soit $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$
 1. Montrer que l'équation $P(X+1) + P(X) = Q(X)$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[\mathbb{X}]$ admet une unique solution.
 2. Que peut-on dire de $P(X) + P(1-X) = Q(X)$

TD5 analyse 2 (intégration)

1. (CCP) Soit:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^{2n+1}}{t} dt$$

1. Montrer que I_0 converge.
2. A l'aide des formules d'Euler montrer :

$$\sin(x)^{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{p} (-1)^p \sin((2n+1-2p)x)$$

3. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$ converge pour tout réel $\alpha > 0$
En déduire que I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$
4. En admettant que $I_0 = \frac{\pi}{2}$ calculer I_n

non préparé : Soit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ l'application linéaire ϕ définie par

$$\phi \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

montrer que ϕ est diagonalisable.

2. (Navale) Soit

$$\phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(xt) dt$$

1. Montrer que ϕ est définie, continue sur \mathbb{R}^+
On suppose désormais $x > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$u_n = \frac{n\pi}{x} \text{ et } I_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(xt) dt$$

2. Déterminer le signe de I_n
 3. Montrer que la suite $(|I_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît
 4. quel est le signe de $\phi(x)$?
3. (CCP) Soit f de classe C^1 sur $[a, b]$ avec $0 < a < 1 \leq b$

On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_a^b \frac{f(x)}{1+x^n} dx$$

1. justifier que u_n est bien défini.

2. Montrer que la suite (u_n) converge vers $\int_a^1 f(x)dx$

On considère la suite

$$v_n = \int_a^1 \frac{x^n f(x)}{1+x^n} dx$$

3. Etudier la limite de la suite (v_n)

4. Montrer que $v_n \sim \frac{f(1) \ln(2)}{n}$ si $f(1) \neq 0$

4. (CCP) Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$.

• Pour tout $x \in [0, 1]$ on pose

$$g(x) = \int_0^1 \inf(x, t) f(t) dt$$

1. Exprimer g à l'aide de deux intégrales

2. Montrer que g est dérivable et calculer g'

3. Montrer que $f \rightarrow g$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}([0, 1])$. est-il injectif ? , surjectif ?

• exprimer dans la base canonique de \mathbb{R}^3 la matrice du demi tour d'axe D $\begin{matrix} z = 0 \\ x \cos(t) = y \sin(t) \end{matrix}$

5. (CCP)

• Soit $k \in \mathbb{N}$. on considère la fonction $F_k x \rightarrow \int_0^1 t^k \sin(xt) dt$

1. Montrer que F_k est développable en série entière et calculer ce développement

2. Montrer que F_k est solution sur \mathbb{R} de

$$xy' + (k+1)y = \sin(x)$$

Est ce la seule solution?

• Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme vérifiant : $u^2 - 12u + 11Id = 0$. Montrer que $Ker(u - Id) \oplus Ker(u - 11Id) = E$

6. (Mines)

• Résoudre

$$y'' - 5y' + 6y = \frac{e^x}{\operatorname{ch}(x)}$$

• Nature des séries de terme général

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ et } v_n = \{-1\}^n u_n$$

TD6 géométrie 2 (espace)

1. (CCP)

• 1. Que représentent

$$S_1 : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } S_2 : y^2 + 4z^2 = 1$$

2. Soit les plans $P_1 : 2z - x = 0$ et $P_2 : 2z + x = 0$. Montrer

$$C = S_1 \cap S_2 = (S_1 \cap P_1) \cup (S_1 \cap P_2)$$

3. Vérifier que $A = (1, 0, 1/2)$ et $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2\sqrt{2}}\right)$ sont deux points de (C)

4. calculer les tangentes à C en A et B puis la perpendiculaire commune aux deux tangentes.

• Soit f un endomorphisme de E , espace vectoriel euclidien vérifiant

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y) \rangle = 0$$

1. Si u et v sont deux vecteurs unitaires montrer $\langle u - v, u + v \rangle = 0$ en déduire $\|f(u)\| = \|f(v)\|$
2. Montrer que f est le composé d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.

2. (CCP)

- Soit la courbe C d'équation :

$$\begin{cases} x = \sin(2t) \\ y = 1 - \cos(2t) \\ z = 2 \cos(t) \end{cases}$$

1. Montrer que C est inclus dans la surface (S) d'équation :

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

Montrer que (S) est un cylindre. en donner l'axe et une section droite.

2. Montrer que pour tout (α, β) (C) est inclus dans la surface :

$$\alpha x^2 + ay^2 + \beta z^2 - 2(\beta - \alpha)y - 4\beta = 0$$

En déduire que (c) est inclus dans un cône.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ résoudre

$$y'' - 2y' + (1 - \lambda)y = 0$$

puis

$$y'' - 2y' + (1 - \lambda)y = x$$

3. (CCP)

- On se place dans \mathbb{R}^3 euclidien

1. Montrer que l'ensemble des points équidistants de deux points distincts P et Q est un plan
2. Soit $O = (0, 0, 0)$, $B = (5, 0, 0)$, $C = (0, 5, 0)$, $D = (0, 0, 5)$. Trouver une équation de la sphère passant par O, B, C, D
3. Montrer que si A, B, C, D sont 4 points non coplanaires, il existe une unique sphère passant par ces 4 points

- Soit l'équation

$$(1 + x^2)y' + 2xy = \frac{1}{1 + x^2}$$

1. Montrer que $f(x) = \frac{\arctan(x)}{1 + x^2}$ est une solution de l'équation.
2. Donner le développement en série entière de f .

$$(1 + x^2)y' + 2xy = \frac{1}{1 + x^2}$$

4. (CCP)

Soit la surface (S) d'équation

$$z^3 = xy$$

1. Montrer que $M \in (S) \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = u^3 \\ y = v^3 \\ z = uv \end{cases}$

2. Montrer que les seules droites incluses dans (S) sont $x'Ox$ et $y'Oy$

3. Déterminer l'équation du plan tangent en un point de $x'Ox$

4. Trouver les points de (S) tels que la plan tangent en ce point contienne la droite $\Delta \begin{cases} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$

5. (Centrale)

- Soit la surface $(S) : xyz = 1$

1. Donner l'équation du plan tangent en $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in (S)$

2. Déterminer la projection P_0 de O sur ce plan

3. Montrer que P_0 est sur la surface d'équation : $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 27xyz$

4. a-t-on la réciproque ?

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$

Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A l'est

Montrer que B et C sont semblables.

6. (Mines Pont)

- Soient l'ellipsoïde $(E) : x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$ et le point $\Omega = (0, 0, 1)$
 1. Déterminer les points $P \in (E)$ tels que ΩP soit une droite tangente à (E)
 2. Donner une équation du cône circonscrit à (E) de sommet Ω
- Soit la suite

$$a_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$$

1. Calculer a_n

TD7 algèbre 3 (Euclidien)

1. (CCP)

- Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 1$ et H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E .
On note e_i un vecteur unitaire orthogonale à H_i et s_i la symétrie orthogonale par rapport à H_i
 1. Montrer : $\forall x \in E, s_i(x) = x - 2(x/e_i)e_i$
 2. Montrer que la somme $H_1^\perp + H_2^\perp$ est directe et stable par $s_1 \circ s_2$
 3. Montrer que x est invariant par $s_1 \circ s_2$ si et seulement si $x \in H_1 \cap H_2$
 4. Montrer que $H_1 \cap H_2$ et $H_1^\perp + H_2^\perp$ sont deux sous espaces vectoriels orthogonaux.
 5. Quelle est la nature de l'endomorphisme induit par $s_1 \circ s_2$ sur $H_1^\perp + H_2^\perp$
- Natures des séries $\sum \sin\left(\left(2 - \sqrt{3}\right)^n \pi\right)$ et $\sum \sin\left(\left(2 + \sqrt{3}\right)^n \pi\right)$
Rayon de convergence de $\sum x^n \sin\left(\left(2 - \sqrt{3}\right)^n \pi\right)$

2. (CCP)

- Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(M; N) \rightarrow \text{tr}({}^t M N)$
 1. Préciser l'orthogonal de G , espace vectoriel des matrices scalaires.
 2. Que vaut la projection orthogonale d'une matrice M sur G , sur G^\perp
 3. Soient \mathcal{A} et \mathcal{S} l'ensemble des matrices antisymétriques (symétriques)
Montrer que ce sont deux sous espaces vectoriels orthogonaux.
 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée. calculer

$$\min \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (m_{i,j} - a_{i,j})^2, M \in \mathcal{S} \right)$$

- Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ Etudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^n + n}{b^n + n} \right)$$

3. (ENSTIM) :

- Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant : $\exists n \geq 2, A^n = {}^t A$ et $B = A^{n+1}$
Montrer que B est diagonalisable
Soit D diagonale semblable à B
calculer D^n . En déduire les valeurs propres de B

- question complémentaire : calculer la limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}}$

4. (EIVP)

- Soit p un projecteur d'un espace vectoriel euclidien E
 1. Montrer que si p est une projection orthogonale : $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$
Etudier le cas d'égalité.
 2. Si p n'est pas une projection orthogonale montrer : $\exists x \in E, \|p(x)\| > \|x\|$
- Soient \mathbb{E} un espace vectoriel normé de dimension finie $f \in C^{2'}([0, 1], \mathbb{E})$ vérifiant $f(0) = 0$
Déterminer la limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ (utiliser l'inégalité de Taylor Lagrange)

5. (Centrale)

1. Soit f définie sur $\mathbb{C} - \{-1\}$ par $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$. Déterminer l'image de l'ensemble U des nombres complexes de module 1, privé de -1
Soit A une matrice carrée, antisymétrique, réelle
 2. montrer que la seule valeur propre réelle possible est 0.
(indice : si X est vecteur propre calculer tXAX)
 3. Montrer que $I_n + A$ est inversible
 4. Montrer que $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ est orthogonale
 5. Montrer que les valeurs propres complexes de B sont de module 1.
 6. Montrer que toutes les valeurs propres complexes de A sont imaginaires pures
6. (Centrale) Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n , n'ayant que des valeurs propres strictement positives.

1. On suppose $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXX \leq {}^tXBX$
 - Montrer que les valeurs propres de B sont supérieurs à 1
 - Montrer $\det(B) \geq 1$
2. Montrer que A est le carré d'une matrice symétrique réelle d'ordre n , n'ayant que des valeurs propres strictement positives.
3. Montrer que si une matrice Σ symétrique réelle d'ordre n , n'a que des valeurs propres strictement positives alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX\Sigma X \geq 0$
4. On suppose $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \leq {}^tXBX$ montrer $\det(A) \leq \det(B)$

TD8 analyse 3 (divers)

1. (Navale)

- Soit f une fonction continue sur $(0, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R} dérivable en 0 vérifiant :

$$f(0) = 1, f'(0) \neq 0 \text{ et } \forall x > 0, 0 < f(x) < 1$$

On définit la suite :

$$u_0 \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n f(u_n)$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite
 2. Quelle est la nature des séries $\sum u_n^2, \sum \ln(f(u_n)), \sum u_n, \sum (-1)^n u_n$
 3. Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et les séries $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ si $u_0 > 0, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$
- nature de la série $\sum \frac{1 - (-1)^{d_n}}{n + 1}$ où d_n est le nombre de diviseurs strictement positif de n .

2. (CCP) On définit pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = |\sin(x + iy)|^2$$

1. Montrer que f admet sur $D = (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1$, un maximum et un minimum. Calculer le minimum/.
2. montrer : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \frac{\text{ch}(2y) - \cos(2x)}{2}$. En déduire les points critiques de f
3. Montrer : $\exists \theta_0 \in \mathbb{R} : \max_D(f) = f(\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$
4. Montrer $\forall t > 0, \text{sh}(t) \geq t$ et $\sin(t) \leq t$. En déduire les variations de $g(\theta) = f(\cos(\theta), \sin(\theta))$ sur $[0, \pi/2]$
5. déterminer le maximum de f sur D

exercice complémentaire ; Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall (i, j), m_{i,j} = \sin(i + j)$. Montrer $rg(M) \leq 2$

3. (CCP)

- On note V l'espace vectoriel des fonction C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit $a \in \mathbb{R}$
 1. Montrer que $\Omega_a : f \mapsto a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$ définit un endomorphisme de V
 2. Soit $f \in V$. A quelle condition sur a existe-t-il une unique fonction dans V telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = F(x, x - ay)$$

On suppose désormais cette condition remplie.

3. Calculer les dérivées partielles premières de f en fonction de celles de F
 4. Déterminer le noyau de Ω_a puis celui de Ω_a^2
 5. Calculer $\Omega_a^2(f)$ et $\Omega_a^3(f)$. Deviner l'expression de Ω_a^n et vérifier cette conjecture.
- Définition du rayon de convergence d'une série entière.
Propriétés d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} \text{ch}(n)x^{3n+1}$

4. (CCP)

- Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$.
 1. Soit $a = \{a_i\}_{i=0}^n$, les a_i étant 2 à 2 distincts.
Montrer que $\|P\|_a = \sum_{k=0}^n |P(a_k)|$ est une norme sur E
 2. Soit $\|\cdot\|$ une norme euclidienne sur E
Montrer $\|P + Q\|^2 + \|P - Q\|^2 = 2(\|P\|^2 + \|Q\|^2)$
 3. Trouver $P_i \in E$ tel que $P_i(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$
 4. Montrer que $\|\cdot\|_a$ n'est pas une norme euclidienne
 5. Montrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que : $\forall P \in E, \lambda \|P\| \leq \|P\|_a \leq \mu P$
 6. Peut-on avoir $\lambda = \mu$

- Soit

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)$$

domaine de définition et de dérivabilité de f . Calculer f' . en déduire une expression simplifiée de f .

5. (Centrale) Soit a un réel positif. On considère la fonction $f(x, y) = x + y - (x^2 + y^2 - ay)$

On note $T = \{(x, y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1\}$ et $T' = \{(x, y), 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < x + y < 1\}$

1. dessiner T
Tracer la surface $z = f(x, y)$ avec Maple pour quelques valeurs de a
2. Montrer $\forall (x, y) \in T, f(x, y) \geq 0$. Quel est le minimum de f sur T
3. Etudier l'existence d'un point critique de f sur T'
4. Calculer le maximum de f sur T
5. Etudier la courbe $f(x, y) = 0$ dans \mathbb{R}^2

6. (Centrale)

Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = xy - 2x \\ y' = 2y - xy \end{cases}$$

1. Déterminer les solutions constantes du système.
2. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution telle que $x(0) = 3, y(0) = 1$
Dans toute la suite on étudie cette solution
3. Maple peut-il la déterminer (remarque :oui mais réponse horrible avec des fonctions hors programme)
On admet qu'il existe un $T > 0$ tel que $x(T) = 3, y(T) = 1$.
4. Montrer que x et y sont T -périodiques
Soit $F(u, v) = u^2 v^2 \exp(4 - u - v)$
5. Montrer : $\forall t \in \mathbb{R} F(x(t), y(t)) = 9$
6. Montrer que x et y sont toujours strictement positifs.
7. tracer la trajectoire de la solution avec Maple.