Corrigé du devoir numéro 1
inspiré d'un sujet de Centrale 1980

Toutes les figures sont à la fin du corrigé, aussi bien la figure de synthèse demandée que les figures intermédiaires qui illustrent chaque question.
Dans votre copie, placez les figures intermédiaires à coté de la question correspondante et n'hésitez pas à utiliser la couleur (les contraintes du noir et blanc m'ont obligé à faire deux figures là ou le sujet en demande une seule)

PREMIERE PARTIE

1. figure 1 (On remarquera qu'il existe en général deux points M définissant le même point L)

   - Soit $L = \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}$ un point de Oy et $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le point étudié.
     L et A étant toujours distincts la droite D_{AL} est bien définie.
     On écrit que M appartient à la droite AL donc $\det(\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{ML}) = 0$
     $$3\,(l-y) + x\,(l-4) = 0$$
     puis que $\|LO\|^2 = \|LM\|^2$ (M est sur le cercle de centre L passant par O)
     $$x^2 + (y-l)^2 = l^2$$
     On a donc :
     $$\left\{ \begin{array}{c} (3+x)l = 4x+3y \\ 2ly = x^2+y^2 \end{array} \right.$$
     – si $y = 0$ alors $x = 0$ le point M est bien sur S_1
     – si $y \neq 0$ alors
     $$l = \frac{x^2+y^2}{2y}$$
     et donc
     $$2y(4x+3y) = (3+x)(x^2+y^2)$$
     soit en développant :
     $$x(x^2+y^2) = 3y^2 + 8xy - 3x^2$$
     le point M est aussi sur S
     $$\boxed{E \subset S}$$
   - Réciproquement soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point de S .
     L est l'intersection de la droite D_{AM} et de $y'Oy$. **ce qui impose que :A $\neq$ M et que AM ne soit pas verticale.**
     – A est un point de S_1 (reporter $(-3,4)$ dans l'équation) , et A est un point de E (si L est l'intersection de $y'Oy$ avec la médiatrice de OA)
     (cf figure 2)
     – si AM est verticale alors $x = -3$ si on reporte dans l'équation $f(x,y) = 0$ on a $-6y^2 + 24y = 0$ donc $y = 4$ (c'est A) ou $y = 0$
     Si on prend $M = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ il ne peut pas exister de point L sur $y'Oy$ tel que $M \in D_{AL}$. Le point est sur S_1 et pas sur E .
     – sinon on pose $L = D_{AM} \cap y'Oy$. Si on pose $L = \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix}$ le calcul précédent donne $l = \dfrac{4x+3y}{3+x}$ on a alors
     $$\left\|\overrightarrow{LO}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{LM}\right\|^2 \Longleftrightarrow x^2+y^2-2ly = 0 \Longleftrightarrow \left(x^2+y^2\right)(3+x) - 2\,(4x+3y)\,(y) \Leftrightarrow (Eq)$$
     $$\boxed{S - E = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

2. S_2 est défini pour tout t réel

   - Soit M un point de S_2 on a donc $y = tx$. Donc
     $$x\left(x^2+y^2\right) = x^3(1+t^2) = \frac{\left(3t^2+8t-3\right)^3}{\left(t^2+1\right)^2} et 3y^2 + 8xy - 3x^2 = x^2\left(3t^2+8xy-3\right) = \frac{\left(3t^2+8t-3\right)^3}{\left(t^2+1\right)^2}$$
     donc M est dans S .

- Soit M un point de S :
  - si $x = 0$ on a $y = 0$ c'est un point de S_2 obtenu pour t racine de $3t^2 + 8t - 3$: $t = -3$ ou $t = \dfrac{1}{3}$
  - si $x \neq 0$ on peut définit $t = \dfrac{y}{x}$ et si on reporte dans S_1 on a $x^3(1+t^2) = x^2\left(3t^2 + 8t - 3\right)$. On peut simplifier par x (supposé non nul) et par $1 + t^2$ (toujours non nul).

$$x = \frac{(3t^2 + 8t - 3)}{(t^2 + 1)} \ , \ y = tx$$

  - On a bien :

$$\boxed{S = S_2}$$

3. S_3 est défini si $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

   On peut linéariser : $4\sin(2\theta) - 3\cos(2\theta) = 4\sin(\theta)\cos(\theta) - 3\left(\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2\right)$

   - Soit M un point de S_3 on a donc

$$r = \frac{4\sin(\theta)\cos(\theta) - 3\left(\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2\right)}{\cos(\theta)}$$

   soit

$$r\cos(\theta) = 4\sin(\theta)\cos(\theta) - 3\left(\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2\right)$$

   On multiplie l'équation par r^2 :

$$(r\cos(\theta))\,r^2 = 4\,(r\sin(\theta))\,(r\cos(\theta)) - 3\left((r\cos(\theta))^2 - (r\sin(\theta))^2\right)$$

   On retrouve bien (Eq)

   - Soit M un point de S on a en passant en polaire :

$$r^3\cos(\theta) = r^2\left(3\sin(\theta)^2 + 8\sin(\theta)\cos(\theta) - 3\cos(\theta)^2\right)$$

     - si $r \neq 0$ et $\cos(\theta) \neq 0$ on trouve bien $r = \dfrac{4\sin(2\theta) - 3\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}$
     - si $r = 0$ M est sur S_3 pour $\tan(2\theta) = \dfrac{3}{4}$ donc $\theta = \dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{3}{4}\right)$ $[\pi/2]$
     - si $\cos(\theta) = 0$, $x = 0$ et donc $y = 0$: c'est le cas précédent .

$$\boxed{S = S_3}$$

DEUXIEME PARTIE

1.

   - La projection orthogonale de (x, y) sur $x'Ox$ est le point $(x, 0)$. Donc $(x, 0)$ est la projection d'un point de S si et seulement si il existe un réel y tel que (x, y) soit élément de S ;

$$(x, 0) \in p(S) \iff \exists y \in \mathbb{R} \ , \ x\left(x^2 + y^2\right) = 3y^2 + 8xy - 3x^2$$

     et le nombre d'antécédents de $(x, 0)$ est le nombre de racines distinctes de l'équation différentes. On cherche donc le nombre de racines (en y) de :

$$(x - 3)y^2 - (8x)y + (x^3 + 3x^2) = 0$$

     - si $x = 3$ on a une équation du premier degré de racine $y = 9/4$. Donc $(3, 0)$ est la projection d'un unique point de S
     - si $x \neq 3$ on a une équation du second degré et $\Delta = 64x^2 - 4(x-3)(x^3 + 3x^2) = 4x^2(25 - x^2)$ donc :
       * $x < -5$ ou $x > 5$: pas de solution $(x, 0)$ n'est pas une projection d'un point de S
       * $x = 0, x = 5$ ou $x = -5$: (x, y) est la projection d'un unique point de S
       * $x \in]-5, 5[$ et $x \neq 0$ et $(x \neq 3)$:: (x, y) est la projection de 2 points de S

- Donc $p=-5$, $q=5$ et le nombre d'antécédents est donné ci dessus (cf tableau 3)
- le point de S tel que $x=p=-5$ est solution de $-5\left(5^2+y^2\right)=3y^2+8(-5)y-3.25$ donc $y=5/2$:

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}-5\\5/2\end{pmatrix}}$$

  De même

$$\boxed{Q=\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}} \text{ et } \boxed{\text{la projection de } S \text{ est le segment } \left[\begin{pmatrix}-5\\5/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}\right]}$$

  Remarque : on peut aussi étudier les variations de la fonction $x(t)$.
- L'équation polaire de la courbe montre que l'équation est du type $\rho=\phi(\theta)$ avec ϕ fonction de classe C^1. Donc tout point de la courbe , autre que le pôle , est régulier , et donc on a une tangente en P et Q et le point n'est pas un point de rebroussement.
  Mais on sait aussi que en P et Q x est extrémal donc la tangente est verticale.
  Remarque : L'étude en paramétrique est possible , mais après avoir prouver $x'(t)=0$ il faut justifier $y'(t)\neq 0$. Vous aurez sans doute montrer aussi que P et Q sont les seuls points à tangentes verticales.

$$\boxed{\text{tangentes verticales en } P \text{ et } Q}$$

2. On prend la forme paramétrique de S. Les seules branches infinies possibles sont obtenues pour t tendant vers $\pm\infty$. On a alors $x\sim 3$ et $y\sim 3t$. Donc une asymptote verticale $x=3$

$$\boxed{D : x=3}$$

   On résout alors $x=3$ ce qui donne sans problème $t=3/4$ et donc $y=tx=9/4$. $\Omega=\begin{pmatrix}3\\9/4\end{pmatrix}$.

   De plus $x-3=\dfrac{\left(3t^2+8t-3\right)}{\left(t^2+1\right)}-3=\dfrac{8t-6}{t^2+1}$, donc $\begin{cases} t>3/4\Rightarrow(x-3)>0 : \text{ la courbe est à droite de l'asymptote}\\ t<3/4\Rightarrow(x-3)<0 : \text{ la courbe est à gauche de l'asymptote}\end{cases}$ et la courbe coupe l'asymptote en Ω .

3. L'étude de l'origine est simple en polaire : On sait déjà par le **I.3** que $r=0\Longleftrightarrow\theta=\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{3}{4}\right)\ [\pi/2]$. De plus si r est une fonction continue en θ_0 et si $r(\theta_0)=0$ alors la courbe passe par le pôle avec une tangente d'angle polaire θ_0 . Donc les tangentes à l'origine ont les angles polaires $\theta=\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{3}{4}\right)$ *et* $\theta=\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{3}{4}\right)+\pi/2$. elle sont orthogonale.

   remarque : la droite d'angle polaire $\theta=\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{3}{4}\right)+\pi$ est la même que celle d'angle polaire $\theta=\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

4. On peut donc tracer la courbe avec les éléments suivants (on synthétise tous les points déjà trouvés):

   1. $t->-\infty$: asymptote verticale $x=3$, courbe à gauche de l'asymptote (**II.2)**
   2. $t=-3$, $M=0$ (**I.2)**
   3. $t=-4/3$ $M=A$ (on sait que $A\in S$, et on calcule alors t)
   4. $t=-1/2$ $M=P$ (on sait que $P\in S$, et on calcule alors t)
   5. $t=0$ $M=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$: (le point de $S-E$)
   6. $t=1/3$ $M=0$ (**I.2)**
   7. $t=3/4$ $M=\Omega$ (I**I.2)**
   8. $t=+\infty$: asymptote verticale $x=3$, courbe à droite de l'asymptote (**II.2)**

   On peut, si on veut, calculer quelques autres points pour d'autres valeurs de t .

   On a alors le graphe le plus simple pour S (voir figure de synthèse) , même si ce n'est pas le seul compatible avec les points précédents.

   Pour construire proprement la figure demandée :

   1. on construit le repère et le point A
   2. on choisi un point $L\in y'Oy$

3. on construit alors M par intersection de AL et du cercle de centre L et de rayon OL
4. on place alors P, Q, Ω .
5. On trace enfin S de façon cohérente avec tout ce qui précède.
   remarques:
   Remarque : si on calcule en cartésienne ou en polaire la tangente en A on prouve qu'elle passe par Ω . Il y a un point à tangente horizontale entre A et P.Il y a aussi un point d'inflexion au dessus de Q

TROISIEME PARTIE

1.

- le triangle est rectangle en O car $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5/2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} = 0$
- $A \in D_{PQ}$ car $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = -4\overrightarrow{AP}$ donc les trois points sont alignés
- on a la hauteur car $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15/2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{PQ} = 0$

2. On a $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ donc $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OQ}\right) = \arctan(2)$. on a $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}\right) = \arctan(-4/3) + \pi$

   On veut montrer $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}\right) = 2\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OQ}\right)$ modulo π , soit $\tan\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}\right) = \tan 2\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OQ}\right)$ $.Or \tan(2u) = \dfrac{2\tan(u)}{1-\tan(u)^2}$ donc
   $$\tan 2\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OQ}\right) = \frac{2.2}{1-4} = -\frac{4}{3} = \tan\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}\right)$$
   D_{OQ} et l'une des bissectrices des droites $x'Ox$ et D_{OA} . comme les deux bissectrices d'un couple de droites sont orthogonales et passent par le point d'intersection , la seconde bissectrice est D_{OP} d'après la question précédente.

3. On a $\overrightarrow{\Omega P} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1/4 \end{pmatrix}$ donc $\left\|\overrightarrow{\Omega P}\right\| = \sqrt{64+1/16} = \dfrac{\sqrt{1025}}{4}$ et $\overrightarrow{\Omega Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ -31/4 \end{pmatrix}$ donc $\left\|\overrightarrow{\Omega Q}\right\| = \sqrt{4+961/4} = \dfrac{\sqrt{1025}}{4}$
   Le triangle ΩPQ est donc isocèle en Ω. Une bissectrice de $(D_{\Omega P}, D_{\Omega Q})$ est donc la hauteur issue de Ω du triangle. Cette hauteur est donc orthogonale à D_{PQ} , donc parallèle à D_{OA} d'après la première question.

4. le calcul peut se faire en cartésienne :

5. Soit M un point de S , $M \neq 0$ .On pose $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a alors $J = \begin{pmatrix} 3 \\ 3y/x \end{pmatrix}$ (car $x = 0 \Longrightarrow M = O$ impossible dans cette question) et $K = \begin{pmatrix} 3-x \\ 3y/x - y \end{pmatrix}$
   On cherche un cercle passant par 0 , donc un cercle d'équation
   $$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$$
   ce qui équivaut à
   $$(3-x)^2 + (3y/x - y)^2 - 2a(3-x) - 2b\,(3y/x - y) = 0$$
   on multiplie par x^2 et on remarque que $3y/x - y = \dfrac{y(3-x)}{x}$ on a donc

   - pour $x \neq 3$ (car on simplifie par $x - 3$)
     $$(3-x)(x^2+y^2) = x\,(2ax + 2by)$$
     donc :
     $$x\left(x^2+y^2\right) = 3y^2 + (3-2a)x^2 - 2bxy = 0$$
     en comparant avec (Eq) on trouve $a = 3, b = -4$

   - pour $x = 3$ on trouve (en reportant dans (Eq)) $y = 9/4$, et $M \in D$. on a alors $J = M$ et il suffit de prendre $K = O$

$$\boxed{(C) \text{ est le cercle de centre } (3,-4) \text{ et de rayon } 5}$$

remarque : le centre du cercle est le symétrique de A par rapport à O .

le calcul est toutefois plus simple en polaire si on connaît son cours :

les 3 points MJK sont alignés sur une droite passant par O. Ils peuvent avoir le même angle polaire noté θ. on a alors

- $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\theta} = \dfrac{4\sin(2\theta) - 3\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}$ (équation polaire de S)
- $\overrightarrow{OJ} = \dfrac{3}{\cos(\theta)}\overrightarrow{u_\theta}$ (équation polaire d'une droite)
- $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OM} = \dfrac{-4\sin(2\theta) + 3(1+\cos(2\theta))}{\cos(\theta)}\overrightarrow{u_\theta} = (-8\sin(\theta) + 6\cos(\theta))\,\overrightarrow{u_\theta}$ (en linéarisant)

  donc $\overrightarrow{OK} = 10\cos(\theta - \theta_0\ )\overrightarrow{u_\theta}$ avec $\cos(\theta_0) = \dfrac{3}{5}$, $\sin(\theta_0) = \dfrac{4}{5}$. (amplitude et phase)

  C'est l'équation polaire du cercle passant par O , le diamètre ayant une longueur de 10 et ayant un angle polaire de θ_0

6. Les deux points M et M' sont des points de S de même abscisse x , et d'après **II.1** les ordonnées sont les deux racines y et y' de l'équation du second degré :

$$(x-3)Y^2 - (8x)Y + (x^3 + 3x^2) = 0$$

En particulier (ce qui suffira ici) $y + y' = \text{"} - \dfrac{b}{a}\text{"} = \dfrac{8x}{x-3}$. les coordonnées de H sont x et $\dfrac{y+y'}{2} = \dfrac{4x}{x-3}$

La courbe cherché est donc la restriction de l'hyperbole $y = \dfrac{4x}{x-3}$ au domaine : $]-5,0[\cup]0,3[\cup]3,5[$.

On peut deviner géométriquement (ce qui valide le calcul) que

- si x tend vers -5 M et M' tendent vers P , donc aussi H
- si x tend vers 5 M et M' tendent vers Q , donc aussi H
- si x tend vers 0 M et M' tendent vers 0 , donc aussi H
- si x tend vers 3 , l'un des points tend vers Ω et l'autre vers l'infini , donc H tend vers l'infini.