PC2
Devoir sur table numéro 1
samedi 22 septembre

Calculatrices interdites

Problème I

Dans tout le problème, on considère la fonction numérique f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ f(x) = -x^2 + 2x + 1$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \text{ est un réel fixé et } \forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. **Étude de la fonction** f
   (a) Étudier le sens de variation de la fonction f.
   (b) Déterminer les deux racines de l'équation $f(x) - x = 0$.
   Ces deux racines sont réelles et de signe contraire. On note ℓ_1 la racine négative et ℓ_2 la racine positive.

   (c) Déterminer les deux racines de l'équation $f(x) = \ell_1$.
   Ces deux racines sont réelles et de signe contraire. On note L_1 la racine positive.
   (d) Donner, en discutant selon les valeurs de x, le signe de $f(x) - x$.
   (e) Dresser le tableau de variation de la fonction f en faisant notamment figurer dans le tableau les valeurs de x égales à ℓ_1, ℓ_2,$L1$, 1 et 2 ainsi que les valeurs correspondantes de $f(x)$.
   (f) Tracer la courbe représentative de la fonction f, notée C_f, dans un repère orthonormé du plan (unité 2 cm)
   On pourra prendre pour le tracé la valeur approchée $\sqrt{5} \approx 2,2$
   (g) Sur le même graphique, tracer la droite D d'équation $y = x$.
2. **Étude de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (a) Sur le graphique précédent représenter à l'aide de la courbe C_f et de la droite D les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   – lorsque $u_0 < l_1$;
   – lorsque $u_0 \in [1, 2]$.
   (b) On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie λ.Quelles sont les valeurs possibles de λ ?.
   (c) Montrer $\forall n \geq 1 \ , \ u_n \leq 2$
3. **quelques cas particuliers de la suite :**
   Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer sa limite (si elle existe) si :
   – $u_0 = \ell_2$
   – $u_0 = 1$
4. **Dans cette question, on suppose :** $u_0 < \ell_1$**.**

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < \ell_1$.

(b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(c) Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et déterminer sa limite éventuelle.

5. **Dans cette question, on suppose :** $u_0 > L_1$.
   Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et déterminer sa limite éventuelle.
6. **Dans cette question, on suppose :** $u_0 \in]1, \ell_2[$.

   (a) Démontrer que $\ell_2 < u_1 < 2$.
   Dans les questions qui suivent, on note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies pour tout entier naturel n, par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

   (b) Prouver que, pour tout entier naturel, $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.

   (c) Démontrer que, pour tout entier naturel n
   $$1 < v_n < \ell_2 \text{ et } \ell_2 < w_n < 2.$$

   (d) Pour tout réel x, calculer $f \circ f(x)$.

   (e) Déterminer les valeurs du réel x telles que $f \circ f(x) - x = 0$.

   (f) Déterminer,en discutant selon les valeurs de x, le signe de $f \circ f(x) - x$ pour x appartenant à l'intervalle $]1, 2[$.

   (g) Prouver que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et préciser la limite de chacune d'entre elles.

   (h) Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et déterminer sa limite éventuelle.
7. **Dans cette question, on suppose :** $u_0 \in]\ell_2, 2[$.
   Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et déterminer sa limite éventuelle.
8. **Dans cette question, on suppose :** $u_0 \in]\ell_1, 1]$.

   (a) Montrer que $u_1 > u_0$

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être strictement croissante.

   (c) Justifier l'existence d'un indice $n_0 \geq 1$ tel que
   $$n < n_0 \;\Rightarrow u_n < u_{n+1} \text{ et } u_{n_0} \geq u_{n_0+1}$$

   (d) Montrer que $u_{n_0} \in [\ell_2, 2]$

   (e) que peut-on en déduire pour la suite (u_n)
9. **synthèse : Dans cette question, on suppose** u_0 **quelconque.**
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\ltimes}$ converge si et seulement si elle est stationnaire.

****

Problème II

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Étant donné un réel strictement positif p ($p > 0$), on désigne par D la droite d'équation $y = -\dfrac{p}{2}$ et par F le point de coordonnées $\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$.

On considère l'ensemble des points M du plan équidistants du point F et de la droite D c'est-à-dire tels que MF = MH où H est le projeté orthogonal de M sur la droite D.

Par définition, cet ensemble est la parabole P de directrice D et de foyer F.

Pour répondre aux différentes questions, il est vivement conseillé de faire plusieurs schémas qui pourront servir de supports aux divers raisonnements.

Partie I ***Étude de quelques propriétés de la parabole et de ses tangentes***

1. On désigne par K le projeté orthogonal de F sur la droite D.
   Vérifier que O appartient à la parabole P et que O est le milieu du segment [FK].
   O est appelé sommet de la parabole.
2. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y).
   (a) Déterminer les coordonnées de H projeté orthogonal de M sur la droite D.
   (b) En déduire que la parabole P de foyer F et de directrice D a pour équation $y = \dfrac{1}{2p}x^2$.
   (c) En déduire une équation polaire $r = \phi(\theta), \theta \in I$ de la parabole P . Vous préciserez un intervalle I aussi petit que possible.
3. En choisissant 2 cm pour unité graphique dans le plan, tracer la parabole P_0 correspondant au cas $p = \dfrac{1}{2}$. On placera sur le graphique le foyer F_0 et la directrice D_0 de la parabole.

   On revient maintenant au cas général où p est un réel strictement positif quelconque.
4. Soient M_0 un point de la parabole P d'abscisse x_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur la droite D.
   (a) Déterminer une équation de la tangente T_0 en M_0 à la parabole P. Préciser la tangente au sommet de la parabole ; cette droite sera désignée par d.
   (b) Montrer que la droite T_0 est orthogonale à la droite FH_0.
   (c) Que représente la droite T_0 pour l'angle $\widehat{H_0M_0F}$
   (d) Soit f_0 le projeté orthogonal de F sur la droite T_0 .
   Montrer que f_0 est un point de la droite d.
5. Soient A et B deux points de la parabole P d'abscisses respectives a et b avec $a < b$.
   Les tangentes en A et B à la parabole P se coupent au point Q.
   (a) Déterminer les coordonnées des points A, B et Q.
   (b) On désigne par I le milieu du segment [AB] et par E le point d'intersection de la droite (IQ) avec la parabole P.
   Déterminer les coordonnées du point E ; vérifier que E est milieu du segment [IQ].
   (c) Montrer que la tangente en E à la parabole est parallèle à AB
   (d) Montrer que la droite qui passe par les points α et β milieux respectifs des segments [AQ] et [BQ] est tangente en E à la parabole P.
6. On garde les notations A, B, I et Q de la question précédente.
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que les tangentes en A et B soient orthogonales.
   (b) On considère l'ensemble des points Q intersection de deux tangentes orthogonales à la parabole. Montrer que cette ensemble est une droite .
   (c) On considère l'ensemble des points I milieu des cordes $[AB]$ telles que les deux tangentes en A et B soient orthogonales . Montrer que cette ensemble est une parabole dont on donnera une équation .

****