

On dit qu'une suite réelle $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **ultimement périodique** lorsqu'elle est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$(\mathcal{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+p} = a_n$$

(L'entier p est une période de la suite $(a_n)_{n \geq n_0}$).

On note QP l'ensemble des suites ultimement périodiques de réels.

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés élémentaires de ces suites et le caractère ultimement périodique éventuel de suites simples.

PARTIE 1

1. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de QP et $\mathcal{P}(a)$ l'ensemble des périodes de a

$$p \in \mathcal{P}(a) \iff p > 0 \text{ et } (\exists n_p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_p \Rightarrow a_{n+p} = a_n)$$

1. Soit $p \in \mathcal{P}(a)$ montrer que pour tout entier k , $kp \in \mathcal{P}(a)$
2. Soit p et q deux éléments de $\mathcal{P}(a)$ tels que $q < p$. Montrer que $p + q \in \mathcal{P}(a)$ et $p - q \in \mathcal{P}(a)$
3. Montrer qu'il existe un entier $T = \min \{p \in \mathcal{P}(a), p > 0\}$
4. Soit $p \in \mathcal{P}(a)$. On écrit la division euclidienne de p par T : $p = qT + r$, $q \in \mathbb{N}$, $r \in [[0, T - 1]]$
Montrer que si r est non nul, $r \in \mathcal{P}(a)$ et en déduire une absurdité.
5. En déduire

$$\mathcal{P}(a) = \mathbb{N}^* T = \{kT, k \in \mathbb{N}^*\}.$$

T est la période de la suite a .

6. Que peut-on dire de la suite lorsque $T = 1$?
7. Montrer qu'il existe un plus petit entier n_0 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+T} = a_n.$$

2. Montrer que QP est un sous espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles. Est-il de dimension finie?

PARTIE II

1. Exemple 1

On définit la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

et la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_n = 0$ si F_n est pair et $a_n = 1$ sinon. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle ultimement périodique?

Montrer que la série $\sum a_n x^n$ converge si $|x| < 1$. Calculer dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

2. Exemple 2

Soit $x = \frac{a}{b}$ un rationnel strictement positif, donné sous forme irréductible. On définit deux suites d'entiers $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

- d_0 est le quotient et r_0 est le reste de la division euclidienne de a par b .
- pour tout $n \geq 1$, r_n (resp. d_n) est le reste (resp. le quotient) de la division euclidienne de $10.r_{n-1}$ par b .

1. Dans cette question (uniquement), $x = \frac{22}{7}$. Déterminer d_0, d_1, \dots, d_{10} .
2. Montrer que $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est fini.
En déduire que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ultimement périodique. Qu'en est-il de $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq d_n \leq 9$.
4. Établir l'égalité :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n 10^{-n}.$$

on pourra commencer par simplifier $x - S_n$ où S_n est une somme partielle de la série.

PARTIE III

Le but de cette partie est de montrer que le réel π n'est pas un élément de \mathbb{Q} .

$E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de \mathbb{R} dans lui-même. Pour tout élément f de E , on note F l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x t f(t) dt.$$

On note L l'application définie sur E et qui à tout élément f associe F .

1. Vérifier que L est une application linéaire de E dans E .

Si f est un élément de E , on définit une suite d'éléments de E par $f_0 = f$ et, pour tout n de \mathbb{N} , $f_{n+1} = L(f_n)$.

2. On considère dans cette question un élément f de E supposé borné sur \mathbb{R} et on note $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

1. Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} ,

$$|F(x)| \leq M \frac{x^2}{2}.$$

2. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* et tout x de \mathbb{R} ,

$$|f_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{2.4 \dots 2n} M.$$

3. En déduire la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R} et calculer la limite de cette suite.

3. On prend maintenant dans cette question et dans les suivantes $f = \sin$, et on considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie au début de cette partie.

1. Déterminer les fonctions f_0, f_1 et f_2 .

2. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* et tout x de \mathbb{R} ,

$$f_{n+1}(x) = (2n + 1)f_n(x) - x^2 f_{n-1}(x).$$

4. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note F_p le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes de degré au plus p .

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie dans la question précédente avec $f_0 = \sin$

1. Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , il existe un couple de fonctions P_n et Q_n de F_n , telles que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = P_n(x) \sin x + Q_n(x) \cos x.$$

Montrer que ce couple est unique (indice : supposé qu'il existe deux décompositions et introduire $f_n(2p\pi), p \in \mathbb{Z}$) et exprimer P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de $P_n, Q_n, P_{n-1}, Q_{n-1}$

2. Montrer que les fonctions P_n sont des polynômes à coefficients entiers.
5. On suppose ici que le réel π est élément de \mathbb{Q} , ensemble des nombres rationnels. Soit donc p élément de \mathbb{Z} et q élément de \mathbb{Z} tels que $\pi = \frac{p}{q}$.

1. Montrer que la suite

$$\left((2q)^n P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

est une suite d'entiers. Quelle est sa limite ?

2. En déduire que cette suite est stationnaire nulle, puis qu'elle est constante nulle.
3. Montrer que π n'est pas rationnel.

PARTIE IV

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par, pour tout n de \mathbb{N}^* , $a_n = 1$ si $\sin(n) > 0$, $a_n = 0$ sinon. Le but de cette partie est d'étudier si cette suite à valeurs entières est élément de QP .

On suppose (par l'absurde) que cette suite est ultimement périodique.

1.
 1. En utilisant la partie **III**, montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(n) \neq 0$
 2. Montrer qu'il existe un entier strictement positif τ tels que, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, le signe de $\sin(k\tau)$ soit constant.
 3. Montrer $\forall k \in \mathbb{N}, \cos(k\tau) > 0$
2. Soit $G = \tau\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \{n\tau + 2k\pi, (n, k) \in \mathbb{Z}^2\}$.
 1. Montrer que G est un sous-groupe additif de \mathbb{R} .
 2. On suppose qu'il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z} = \{ap, p \in \mathbb{Z}\}$.
 - Montrer que 2π et τ sont des multiples de a .
 - Déduire une absurdité de la partie précédente. Que peut-on en conclure?
 3. On pose $G^+ = G \cap \mathbb{R}^{+*}$ (ensemble des éléments strictement positifs de G). Montrer que G^+ possède une borne inférieure a .
 4. On suppose $a \in G^+$ c'est à dire que a est le plus petit élément de G^+
 - Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{Z}, ka \in G^+$
 - Montrer que pour tout $g \in G$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $g - ka \in G$ et $0 \leq g - ka < a$
 - En déduire $G = a\mathbb{Z}$
 - En déduire que a n'est pas élément de G^+
 5. On suppose maintenant $a > 0$
 - Montrer que l'on peut trouver deux éléments g et g' de G^+ tels que $a < g' < g < 2a$.
 - Montrer $g - g' \in G^+$ et $g - g' < a$

- En déduire $a = 0$.

3.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n \in G$ tel que $0 < g_n < 10^{-n}$.
2. Soit x un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\lambda_n = E\left(\frac{x}{g_n}\right)$
Montrer que la suite $(\lambda_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de G convergeant vers x .

4.

1. En choisissant bien la valeur de x , montrer l'existence d'une suite d'entiers positifs $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(\cos(k_n \tau))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $-\frac{1}{2}$.
2. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle ultimement périodique ?

Partie V

Dans cette partie j'ai regroupé la fin de la partie 1 et un troisième exemple de la partie 2. Ces questions portent sur les séries entières. Elles ne sont pas abordables par les 3/2. Les 5/2 peuvent les aborder avec profit.

1. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite ultimement périodique.

1. Montrer que a est bornée et que le rayon de convergence R_a de la série entière $\sum a_n x^n$ est strictement positif. À quelle condition nécessaire et suffisante R_a est-il égal à $+\infty$? Que vaut-il sinon ?
2. Montrer que la somme de cette série est une fraction rationnelle. Dans quel cas est-ce un polynôme ?

2. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme est la restriction à $] -R, R[$ d'une fraction rationnelle.

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle ultimement périodique ?

3. On définit maintenant la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = a_n \text{ et } a_{2n+1} = -a_n.$$

1. calculer les termes de la suite pour $n \leq 10$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. On note S sa somme.
3. Montrer $\forall x \in] -1, 1[$, $S(x) = (1-x)S(x^2)$
4. En déduire que, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1 - x^{2^k}).$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer

$$\frac{S(x)}{(1-x)^n} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1-x^{2^k}}{1-x} \right) (1-x^{2^n}) S(x^{2^{n+1}})$$

En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{S(x)}{(1-x)^n} \right)$$

6. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle ultimement périodique ?