Partie 1

Les polynômes P_n sont des polynômes de Legendre. Ils peuvent apparaître dans plusieurs type de problème.

1. .

$$\boxed{P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}, P_3 = \frac{5}{2}X^3 - \frac{3}{2}X}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est paire.
   Or la dérivée d'une fonction paire est impaire et celle d'une fonction impaire est paire. Par conséquent

$$\boxed{P_n \text{ une fonction paire si } n \text{ est pair, impaire si } n \text{ est impair}}$$

3. On utilisera plusieurs fois la formule de taylor : si $P = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k (X - x_0)^k$ alors $\alpha_k = \dfrac{P^{(k)}(x_0)}{k!}$

- f_n est un polynôme de degré $2n$ et de coefficient dominant $\dfrac{1}{2^n n!}$. En dérivant n fois le terme dominant on obtient :

$$\boxed{P_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ de coefficient dominant } \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}}$$

vérification si $n = 2$: $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^n} = \dfrac{4!}{(2!)^2 2^2} = \dfrac{24}{16} = \dfrac{3}{2}$ si $n = 3m \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^n} = \dfrac{6!}{6^2..8} = \dfrac{6.5.4.3.2.}{6.6.8} = \dfrac{5}{2}$

- Par parité si n est impair $P_n(0) = 0$
  Etude si $n = 2p$ est pair ::Par le binôme de Newton :

$$(x^2 - 1)^{2p} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^{2p-k} X^{2k}$$

On cherche $\phi_{2p}^{(2p)}(0)$. On cherche donc le coefficient de X^{2p} donc $k = p$:

$$\phi_{2p}^{(2p)}(0) = (2p)! \binom{2p}{p} (-1)^p$$

donc :

$$P_{2p}(0) = \frac{(-1)^p}{2^{2p}(2p)!}(2p)! \binom{2p}{p} = (-1)^p \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$$

$$\boxed{\text{si } n \text{ est impair } P_n(0) = 0 \text{ , si } n = 2p \text{ est pair } P_n(0) = (-1)^p \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}}$$

Le même type de calcul donne :

$$\boxed{\text{si } n \text{ est pair } P_n'(0) = 0 \text{ , si } n = 2p+1 \text{ est impair } P_n'(0) = (-1)^p \frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2}}$$

vérification : si $n = 2$: $P_2(0) = (-1)^p \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} = (-1)\dfrac{2!}{2^2} = -\dfrac{1}{2}$, si $n = 3$ $P_3'(0) = (-1)^p \dfrac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2} = (-1)\dfrac{3!}{2^2} = -\dfrac{3}{2}$

- On a $(x+1) = ((x-1)+2)$ donc $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (x-1)^{n-k}$. d'où $f_n(x) = (x-1)^n (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (x-1)^{2n-k}$
  Si $k = n$ le coefficient de $(x-1)^n$ donne $f_n^{(n)}(1)$

$$\frac{f_n^{(n)}(1)}{n!} = 2^n$$

et donc

$$\boxed{P_n(1) = 1}$$

vérification si $n = 0, 1, 2, 3$
c'est de là que vient le coefficient $2^n n!$

4. La famille de polynômes $(P_k)_{k=0}^n$ est une famille échelonnée en degré : $\forall k\ d^\circ(P_k) = k$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   si $n = 2$:
$$Mat_{(1,X,X^2)}(P_0, P_1, P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

   On a alors :
$$Mat_{(P_0,P_1,P_2)}(1, X, X^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

5. La formule de Leibniz dit que si f et g sont C^n : $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

   On a donc
$$\begin{aligned} f_{n+1}^{(n+2)}(x) &= \left((x^2-1)f_n(x)\right)^{(n+2)} = (x^2-1)f_n^{(n+2)}(x) + (n+2)(2x)f^{(n+1)}(x) + \frac{(n+2)(n+1)}{2}(2)f_n^{(n)}(x) \\ &= 2^n n! \left((x^2-1)P_n"(x) + 2(n+2)xP_n'(x) + (n+1)(n+2)P_n(x)\right) \end{aligned}$$

   mais aussi
$$\begin{aligned} f_{n+1}^{(n+2)}(x) &= \left(\left((x^2-1)^{(n+1)}\right)'\right)^{(n+1)} = (2(n+1)xf_n(x))^{(n+1)} \\ &= (2n+2)\left(xf_n^{(n+1)}(x) + (n+1)f_n^{(n)}(x)\right) \\ &= 2^n n! \left((2n+2)xP_n'(x) + 2(n+1)^2P_n(x)\right) \end{aligned}$$

   en identifiant :
$$(x^2-1)P_n"(x) + 2(n+2)xP_n'(x) + (n+1)(n+2)P_n(x) = (2n+2)xP_n'(x) + 2(n+1)^2P_n(x)$$

   soit
$$\boxed{(x^2-1)P_n"(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0}$$

6. On a les deux propriétés/définitions :
$$\begin{aligned} a \text{ est racine de } P \text{ d'ordre } \alpha &\iff (X-a)^\alpha \text{ divise } P \text{ et } (X-a)^{\alpha+1} \text{ ne divise pas } P \\ &\iff \forall k < \alpha\ ,\ P^{(k)}(a) = 0 \text{ et } P^{(\alpha)}(a) \neq 0 \end{aligned}$$

   .

   1. par définition même de f_n , $+1$ et -1 sont racines de f_n de multiplicité n .
   2. donc en dérivant $+1$ et -1 sont racines de $f_n^{(k)}$ de multiplicité $n-k$
   3. Montrons par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$ la propriété $\mathcal{P}_k$: " $f_n^{(k)}$ s'annule exactement k fois sur $]-1, 1[$."
      - $\mathcal{P}_0$ est vraie.
      - $\mathcal{P}_1$ est vrai : f_n étant nul en -1 et 1 et étant dérivable sur $[-1, 1]$, f_n' admet une racine c sur $]-1, 1[$.
        On a donc un polynôme degré $2n-1$ dont on connaît deux racines d'ordre $n-1$ (-1 et 1) et une autre racine (c) . Comme $2(n-1)+1 = 2n-1$ le nombre de racines (avec multiplicité) est égal au degré. On a toutes les racines de P_n'.
      - Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour un certain $k \in [\![1, n-1]\!]$. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ les racines de $f_n^{(k)}$ dans $]-1, 1[$ classées par ordre croissant.
        Comme $n-k \geq 1$, $f_n^{(k)}(-1) = f_n^{(k)}(1) = 0$. Notons $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$.
        Pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $f_n^{(k)}(\alpha_i) = f_n^{(k+1)}(\alpha_{i+1}) = 0$, $f_n^{(k)}$ est C^1 sur $[a_i, a_{i+1}]$, : d'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $f_n^{(k+1)}(\beta_i) = 0$.
        on obtient donc ainsi $k+1$ racines distinctes de $f_n^{(k+1)}$ dans $]-1, 1[$
        On a donc $k+1$ racines sur $]-1, 1[$ et deux racines de multiplicité $(n-k-1)$, soit en tout $(2n-k-1)$ racines comptées avec leur multiplicité. On a atteint le degré du polynôme . il n'y en a pas d'autre.
      - ce qui prouve $\mathcal{P}_{k+1}$.
      - La récurrence est établie: $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

En particulier, $\mathcal{P}_n$ assure que $f_n^{(n)}$ donc aussi P_n admet exactement n racines sur $]-1,1[$, et il n'y en a pas d'autres à cause du degré.

$$\boxed{P_n \text{ admet } n \text{ racines simples toutes sur }]-1,1[}$$

PARTIE 2

1.

- f et g étant continues sur $[-1,1]$, fg y est continue . donc l'intégrale existe
les fonctions étant à valeurs réelles , ϕ est à valeurs réelles.
- ϕ est symétrique par commutativité du produit.
- ϕ est linéaire à droite (donc bilinéaire par symétrie)

$$\forall (g,h) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R} \ , \ \int_{-1}^{1} f(t)(g(t)+\lambda h(t))dt = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt + \lambda \int_{-1}^{1} f(t)h(t)dt$$

- enfin ϕ est définie positive car :
  - l'intégrale d'une fonction continue par morceaux positive est positive
  - l'intégrale d'une fonction continue par morceaux , positive , strictement positive et continue en un point , est strictement positive.
- $\forall (f,g,h) \in E^3$, $\phi(fh,g) = \phi(f,gh)$ est évident : les deux quantités valent $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)h(t)dt$

2.

1. On effectue une intégration par partie avec $u = f_m^{(m-1)}$ et $v = g$ qui sont bien C^1 sur $[-1,1]$. Et comme d'après **I.6.2** $f_m^{(m-1)}(1) = f_m^{(m-1)}(-1) = 0$

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} f_m^{(m)}(t)g(t)dt = -\int_{-1}^{1} f_m^{(m-1)}(t)g'(t)dt}$$

On peut refaire une intégration par partie si $m \geq 2$
On a par récurrence :

$$\forall i \leq m : \int_{-1}^{+1} f_m^{(m)}(t)g(t)dt = (-1)^i \int_{-1}^{1} f_m^{(m-i)}(t)g^{(i)}dt$$

- la propriété est vrai si $i = 0$ et $i = 1$
- si elle est vrai au rang $i < m$ on peut encore faire une intégration par partie avec : $f_m^{(i-1)}(1) = f_m^{(i-1)}(-1) = 0$ et donc vérifier la formule au rang $i+1$.

En particulier si $i = m$: $\displaystyle\int_{-1}^{+1} f_m^{(m)}(t)g(t)dt = (-1)^m \int_{-1}^{1} f_m(t)g^{(m)}dt$

Si on suppose que Q est un polynôme de degré $\leq m-1$ on a alors $Q^{(m)} = 0$ et donc

$$\boxed{\forall Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X], \int_{-1}^{1} f_m^{(m)}(t)Q(t)dt = 0}$$

2. On a donc aussi $\forall Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X], \displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(t)Q(t)dt = 0$

or si $k \neq l$ on a $k < l$ ou $l < k$ donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_k(t)P_l(t)dt = 0$ soit $\phi(P_k, P_l) = 0$.

$$\boxed{\text{la famille } (P_k)_{k=0}^{n} \text{ est orthogonale}}$$

3. On applique le principe du a) avec $g = f^{(m)}$. On a

$$\int_{-1}^{1} f_m^{(m)}(t)f_m^{(m)}(t)dt = (-1)^m \int_{-1}^{1} f_m^{(2m)}(t)f_m(t)dt$$

Or f_m est un polynôme de degré $2m$ et de coefficient dominant 1 donc $f_m^{(2m)} = (2m)!$

$$\int_{-1}^{1} f_m^{(m)}(t) f_m^{(m)}(t) dt = (-1)^m (2m)! \int_{-1}^{1} (t^2-1)^m dt$$

Soit alors $J_m = \displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2-1)^m dt$, une intégration par partie en posant $u = (t^2-1)^m$, $v = t$ donne :

$$J_m = -2m \int_{-1}^{1} t^2 (t^2-1)^{m-1} dt = -2m(J_m + J_{m-1})$$

d'où

$$J_m = -\frac{2m}{2m+1} J_{m-1} = (-1)^m \frac{(2m)(2m-2)\cdots 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3} J_0$$

or $J_0 = 2$, $(2m)(2m-2)\cdots 2 = 2^m m!$, $(2m+1)(2m-1)\cdots 3 = \dfrac{(2m+1)!}{2m)(2m-2)\cdots 2} = \dfrac{(2m+1)!}{2^m m!}$

$$J_m = 2 \frac{2^{2m} m!^2}{(2m+1)!}$$

On a donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} f_m^{(m)}(t) f_m^{(m)}(t) dt = 2 \frac{2^{2m} m!^2}{2m+1}$ et $\|P_m\|^2 = \dfrac{1}{(2^m m!)^2} \displaystyle\int_{-1}^{1} f_m^{(m)}(t) f_m^{(m)}(t) dt = \frac{2}{2m+1}$

4. Un base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ est :

$$\boxed{\left(\sqrt{\frac{2m+1}{2}} P_m \right)_{m=0}^{n}}$$

3.

1. On vient de prouver qu'on a une base . Comme XP_n est de degré $n+1$, les $(\lambda_i)_{i=à}^{n+1}$ existent
2. On a
   - d'une part $\phi(XP_n, P_i) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \phi(P_k, P_i)$ (par linéarité) $= \lambda_i \|P_i\|^2$ car la base est orthogonale.
   - d'autre part $\phi(XP_n, P_i) = \phi(P_n, XP_i)$ (par la propriété de ϕ vue à la première question) or $i < n-1 \Rightarrow d^\circ(XP_i) < n \Rightarrow \phi(P_n, XP_i) = 0$ d'après la question précédente :

$$\forall i \leq n-2 \ , \ \lambda_i = 0$$

3. Comme la base (P_i) est échelonnée en degré , le terme dominant de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i$ provient de $\lambda_{n+1} P_{n+1}$.On a donc :

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n} = \lambda_{n+1} \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2 2^{n=2}}$$

d'où $\lambda_{n+1} = \dfrac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \dfrac{n+1}{2n+1}$

4. On a $\phi(XP_n, P_n) = \displaystyle\int_{-1}^{1} t P_n(t)^2 dt$. On connaît la parité de P_n d'après **I.2** . On intégrer donc une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0 . $\phi(XP_n, P_n) = 0$ et dong comme ci dessus $\lambda_n = 0$
5. enfin $\lambda_{n-1} \|P_{n-1}\|^2 = \phi(XP_n, P_{n-1}) = \phi(P_n, XP_{n-1})$; Or XP_{n-1} se décompose dans la base (P_i) : $XP_{n-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mu_i P_i$

   . le **b)** donne $\mu_n = \dfrac{n}{2n-1}$

   et par linéarité , comme la base est orthogonale :$\phi(P_n, XP_{n-1}) = \mu_n \|P_n\|^2$, d'où

$$\lambda_{n-1} = \mu_n \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} = \frac{n}{2n-1} \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2}{2n-1}} = \frac{n}{2n+1}$$

$$\boxed{\forall n \geq 1 : \ XP_n = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1} + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}}$$

comme dans la première partie on vérifie pour XP_1 et XP_2

4. Remarque les dénominateurs sont tous non nuls car les racines sont toutes simples d'après le **I6**

   1. On a $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$
   2. On a n polynômes dans un espace vectoriel de dimension n . La famille est une base si et seulement si elle est libre. Or si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0$, alors en prenant la valeur en x_j il reste $\lambda_j.1 + \sum_{i \neq j} \lambda_i.0 = 0$ et donc $\lambda_j = 0$.
      le calcul est valide pour tout $j \in [[1, n]]$, donc la famille est libre .
      $$\boxed{(L_i)_{i=1}^{n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$
      De même pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, comme on a une base Q se décompose $Q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$ et la valeur en x_j donne $\lambda_j = Q(j)$
      $$\boxed{\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}(X] \ , \ Q(x) = \sum_{i=1}^{n-1} Q(x_j) L_j}$$
   3. Il suffit d'intégrer l'égalité précédente
      $$\beta_i = \int_{-1}^{1} L_i$$
   4. On écrit la division euclidienne de P par P_n : $P = QP_n + R$ avec $d^\circ(R) \leq n-1$
      on a alors $\forall i \in [[1, n]] \,, P(x_i) = R(x_i)$ car les x_i sont racines de P_n
      et $\int_{-1}^{1} P(t)dt = \int_{-1}^{1} Q(t)P_n(t)dt + \int_{-1}^{1} R(t)dt$.
      Or d'après **II.2** le degré de P on a $d^\circ(Q) \leq n-1$. on peut utiliser $II.2$: $\int_{-1}^{1} Q(t)P_n(t)dt$
      Enfin la question précédente donne : $\int_{-1}^{1} R(t)dt = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i R(x_i)$
      $$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X] \ , \ \int_{-1}^{1} P(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \beta_i P(x_i)}$$
   5. On a : $\int_{-1}^{1} P_n(t)^2 dt = \frac{2}{2n+1}$ d'après **II.2** et $\sum_{i=1}^{n} P_m(x_i)^2 = 0$ toujours car les x_i sont racines.
      $$\boxed{\text{l'égalité n'est pas toujours vraie dans } \mathbb{R}_{2n}[X]}$$

5.

   1. si $f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ on a $I(f) - J_n(f) = 0$
   2. L_k^2 est un polynôme de degré $2n-2 \leq 2n-1$. donc $I\left(L_k^2\right) = J_n\left(L_k^2\right)$
      On a en remplaçant : $\beta_k = \int_{-1}^{1} L_k^2(t)dt$ .. On intègre une fonction continue positive , strictement positive en x_k donc :
      $$\boxed{\beta_k > 0}$$
   3. On a aussi $I(P_n^2) - J_n(P_n^2) = \frac{2}{2n+1}$
   4.
      - $I(x^{2n}) = \int_{-1}^{1} x^{2n} dx = \frac{2}{2n+1}$
      - P_n^2 est un polynôme de degré $2n$ de coefficient dominant $\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}\right)^2$ .On peut écrire $P_n^2 = \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}\right)^2 (x^{2n} + S)$ avec $d^\circ(S) \leq 2n-1$. d'où
        $$I(P_n^2) - J(P_n^2) = I\left(\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}\right)^2 x^{2n}\right) - J_n\left(\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}\right)^2 x^{2n}\right) = \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}\right)^2 [I(x^{2n}) - J(x^{2n}))$$

et donc :

$$I'(x^{2n}) - J_n(x^{2n}) = \frac{2.}{(2n+1)}\left(\frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}\right)^2$$

- donc

$$J(x^{2n}) = \frac{2}{2n+1}\left(1 - \left(\frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}\right)^2\right)$$

or

$$0 \leq \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!} = \frac{(2.4\cdots(2n))\,n!}{(1.2.3\cdots.(2n))} = \frac{n!}{1.3.5\cdots(2n-1)} = \frac{2.3.\cdots n}{1.3\cdots(2n-1)} = \frac{2}{3}.\frac{4}{5}\cdots\frac{n}{2n-1} < 1$$

on peut aussi vérifier que si $u_n = \dfrac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}$, $u_0 = 1$ et la suite décroît car $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{2n+1} < 1$

$$\boxed{J(x^{2n}) \leq \frac{2}{2n+1}}$$

5. M_{2n} existe car $f^{(2n)}$ est continue sur le segment $[-1,1]$
6. Si Q est le polynôme de Taylor de f à l'ordre $2n-1$ on a comme $x^{2n} \geq 0$

$$\forall x \in [-1,1]\ ,\ |f(x) - Q(x)| \leq \frac{M_{2n}x^{2n}}{(2n)!}$$

Soit $\varepsilon(x) = f(x) - Q(x)$.Comme $d^\circ(Q) \leq 2n-1$ on a $I(Q) = J(Q)$ donc $I(\varepsilon) - J(\varepsilon) = I(f) - J(f)$
Or

$$|I(\varepsilon)| \leq \int_{-1}^{1} \frac{M_{2n}x^{2n}}{(2n)!}dx = \frac{2M_{2n}}{(2n+1)!}$$

et $|J(\varepsilon)| = \left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i \varepsilon(x_i)\right| \leq \dfrac{M}{(2n)!}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i x^{2n} = \dfrac{M}{(2n)!}J(x^{2n}) \leq \dfrac{2M}{(2n+1)!}$ car $\beta_i > 0$.

$$\boxed{\forall f \in E,\ |I(f) - J(f)| \leq \frac{4M}{(2n+1)!}}$$

6. Si $f = \exp$, alors pour tout n $M = \exp(1)$

$$I(\exp) - J(\exp) \leq \frac{4e}{(2n+1)!}$$

7. la suite tend vers 0 (très rapidement)