concours TPC 2007 Exercice 2

Etude d'une famille de matrices de $M_3(\mathbb{C})$.

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices à coefficients complexes d'ordre 3.On note $j = \exp(2i\pi/3)$

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unité, et on considère la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. .

1.

   1. Vérifier que $K^3 = I$.
   2. Calculer $A = (jK - I)(j^2K - I)$ et $B = (K - I)(K - jI)(K - j^2I)$.
   3. Pour une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ on définit

      $$P(M) = \frac{1}{3}\Big(I + M + M^2\Big)$$

      Calculer $P_1 = P(K)$, $P_2 = P(j^2K)$, $P_3 = P(jK)$.
   4. Calculer les produits matriciels P_1P_2, P_1P_3 et P_2P_3.
   5. Vérifier que $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$, $P_3^2 = P_3$.$P_1 + P_2 + P_3 = I$

2. Soit $F = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} ; (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$.

   Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont vous déterminer une base et la dimension.

3. Soit $F' = Vect(P_1, P_2, P_3)$.

   1. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de F'.
   2. Montrer que F' est stable pour le produit matriciel,.
   3. Montrer que $F = F'$.
   4. Soit une matrice $M(a,b,c)$ de F, déterminer ses coordonnées (α, β, γ) dans la base (P_1, P_2, P_3).

4. Soit $M(a,b,c) = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$, avec (α, β, γ) vérifiant les relations déterminées à la question précédente.

   Montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ [M(a,b,c)]^n = u_nP_1 + v_nP_2 + w_nP_3$$

   avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites complexes dont on déterminera les expressions pour tout $n \in \mathbb{N}$, en fonction de α, β et γ.

5. Soit $D(a,b,c) = M(a,b,c)M(a,bj,cj^2)M(a,bj^2,cj)$.

   1. On note (α, β, γ) les coordonnées de $M(a,b,c)$ dans la base (P_1, P_2, P_3).
      Déterminer en fonction de (α, β, γ), les coordonnées respectives de $M(a,bj,cj^2)$ et $M(a,bj^2,cj)$.
   2. En déduire la décomposition de $D(a,b,c)$ dans la base $(P_1,\ P_2,\ P_3)$, sans recourir à un produit matriciel explicite.

6. Soit $U = M(a,b,c)$, telle que : $\begin{cases} a + b + c = j \\ a + bj + cj^2 = j^2 \\ a + bj^2 + cj = 1 \end{cases}$.

   Montrer que $\mathcal{G}(U) = \left\{U^k; k \in \mathbb{N}\right\}$ est un ensemble fini.