

ESCP 2001 option scientifique

sujet partiel sans les partie 2 et 5 utilisant la réduction des endomorphismes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

- L'objet du problème est l'étude, dans certains cas, des sous-espaces stables par un endomorphisme d'un espace vectoriel.
- Dans tout le problème, on considère un entier naturel n non nul et on note E le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^n .
- On note 0_E le vecteur nul de E et Id_E l'endomorphisme identité de E .
- On dira qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme f de E (ou que f laisse stable F) si l'inclusion $f(F) \subset F$ est vérifiée.
- On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel k , on note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à k .
- Si f est un endomorphisme de E on pose

$$f^0 = Id_E, f^1 = f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f, \text{ etc.}$$

- Si f est un endomorphisme de E , un vecteur propre de f est un vecteur x non nul, tel que $(x, f(x))$ soit lié.
- si M est une matrice carrée, une matrice propre de M est une matrice colonne X non nul tel que (X, MX) soit lié.
- Si f est un endomorphisme de E et si

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

est un élément de \mathbb{R} , on rappelle qu'on note $P(f)$ l'endomorphisme de E égal à

$$P(f) = \sum_{k=0}^n a_k f^k.$$

PARTIE 1 Préliminaires

Soit \mathcal{B} une base de E . Soit f un endomorphisme de E de matrice A dans la base \mathcal{B} .

1.

- a) Montrer que si f et g sont deux endomorphismes qui commutent, le noyau, l'image et les sous espaces propres de g sont stables par f .
- b) Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\ker P(f)$ est stable par f .

2.

- a) Montrer que les droites de E stables par f sont exactement celles qui sont engendrées par un vecteur propre de l'endomorphisme f .
- b) Soit ϕ une forme linéaire non nulle de matrice L dans la base \mathcal{B} . Montrer que $H = \text{Ker}(\phi)$ est stable par f si et seulement si tL est un vecteur propre de tA .
- b) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et on considère l'endomorphisme g de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base \mathcal{B} est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer (en donnant une base) tous les sous espaces stables de g .

3. Soit p un entier naturel non nul.

Si F_1, \dots, F_p sont p sous-espaces vectoriels de E stables par f , montrer qu'alors la somme $\sum_{k=1}^p F_k$ est un sous-espace vectoriel stable par f .

4.

- a) Soit λ un réel. Vérifier que les sous-espaces vectoriels de E stables par un endomorphisme f sont exactement ceux qui sont stables par l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$.
- b) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^2 ?
- c) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un automorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^{-1} ?
- d) Que dire d'un endomorphisme de E laissant stable tout sous-espace vectoriel de E ?
- e) Donner un exemple d'endomorphisme de \mathbb{R}^2 ne laissant stable que le sous-espace vectoriel réduit au vecteur nul et l'espace \mathbb{R}^2 .

PARTIE 3

Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre n

On note $\mathbf{0}$ l'endomorphisme nul de E et on considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre n , c'est-à-dire vérifiant les conditions:

$$f^n = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad f^{n-1} \neq \mathbf{0}.$$

1. Etablir qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice A de f est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

A est donc la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) vaut 1 si $j = i + 1$ et 0 sinon.

2. On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P' .

- a) Vérifier que D^n est nilpotent d'ordre n .
- b) Vérifier que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ stables par D sont, en dehors du sous-espace vectoriel réduit au polynôme nul, les n sous-espaces vectoriels suivants:

$$\mathbb{R}_0[X], \mathbb{R}_1[X], \dots, \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

- c) Soit pour tout $k \in [[0, n - 1]]$, $P_k = \frac{X^k}{k!}$. Montrer que $(P_k)_{k=0}^{n-1}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donner la matrice de D dans cette base.

3. Déterminer (en donnant une base) les sous-espaces vectoriels de E stables par f .

PARTIE 4

Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre 2

Dans cette partie on considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre 2, c'est à dire un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f$ est l'endomorphisme nul.

1. On considère un sous-espace vectoriel F_2 de E vérifiant

$$F_2 \cap \ker f = \{0_E\}.$$

- a) Justifier l'inclusion:

$$f(F_2) \subset \ker f.$$

- b) On considère de plus un sous-espace vectoriel F_1 de $\ker f$ contenant $f(F_2)$. Montrer que la somme $F_1 + F_2$ est directe et que c'est un sous-espace vectoriel de E stable par f .

- c) Étant donné A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E , établir l'inclusion:

$$(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C.$$

A-t-on nécessairement l'égalité?

- d) Déterminer l'intersection

$$(F_1 + F_2) \cap \ker f.$$

2. Réciproquement on considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f . On pose $F_1 = F \cap \ker f$ et on considère un sous-espace vectoriel F_2 supplémentaire de F_1 dans F .

Vérifier l'inclusion $f(F) \subset F_1$.

3. **Dans cette question**, on suppose que l'entier n est égal à 4 (i.e. $E = \mathbb{R}^4$) et on considère l'endomorphisme h de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de \mathbb{R}^4 est la matrice M suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que les sous-espaces vectoriels

$$G_1 = \ker(h - Id)^2 \quad \text{et} \quad G_2 = \ker(h - 2I)^2$$

sont supplémentaires.

b) Montrer que les sous-espaces vectoriels stables par h sont exactement les sommes $H_1 + H_2$ où H_1 (resp. H_2) est un sous-espace vectoriel de G_1 (resp. G_2 .) stable par h .

c) Déterminer (en donnant une base) les sous-espaces vectoriels de E stables par h .