SPE PC 2
Samedi 15 Decembre 2007
Devoir 4

Le sujet est composé d'un exercice :(première partie du sujet CCP PSI 2007 math 2) et d'un problème (début de E4A PSI 2007 Mazth A)EXERCICE :

CCP PSI 2007
Math 2 partie 1

Notations.

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.

Pour n entier naturel non nul, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes) à coefficients réels.

On note $\det(A)$ le déterminant d'une matrice carrée A
Etant donnée une matrice A, la notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A.

Lorsque $A = (a)$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on identifie A avec le réel a.
Pour tout entier naturel, on note $n!$ la factorielle de n, avec la convention $0! = 1$.

Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leq k \leq n$:

- on note $[|p, n|]$ l'ensemble des entiers k tels que $p \leq k \leq n$.
- on rappelle la notation $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

PARTIE I.
calcul de déterminants

I.1. Déterminant d_p.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \in [|0, n|]$, on note $A_p = (a_{i,j})$ la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n-p+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $a_{i,j} = \binom{p+i+j-2}{p+i-1}$ avec $(i, j) \in [|1, n-p+1|] \times [|1, n-p+1|]$. On note $d_p = \det(A_p)$.

I.1.1. Expliciter les entiers r et s tels que $a_{i,j} = \binom{r}{s}$ pour les quatre coefficients $a_{1,1}, a_{1,n-p+1}$, $a_{n-p+1,1}$ et $a_{n-p+1,n-p+1}$.

I.1.2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$ calculer les déterminants d_n, d_{n-1} et d_{n-2}.

I.1.3. On suppose que la matrice A_p possède au moins deux lignes. On note L_i la ligne d'indice i.

I.1.3.1 Dans le calcul de d_p on effectue les opérations suivantes : pour i variant de $n-p+1$ à 2, on retranche la ligne L_{i-1} à la ligne L_i (opération codée $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$). Déterminer le coefficient d'indice (i, j) de la nouvelle ligne L_i.

I.1.3.2 En déduire une relation entre d_p et d_{p+1}, puis en déduire d_p.

I.2. Déterminants D_n et Δ_n.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le déterminant de la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $(i+j)!$, **les lignes et les colonnes étant indexées de** 0 **à** n.
On note $D_n = \det((i+j)!)$.
- Avec les mêmes notations, on note $\Delta_n = \det\left(\binom{i+j}{i}\right)$ pour $(i, j) \in [|0, n|] \times [|0, n|]$.

I.2.1. Calculer les déterminants D_0, D_1, D_2, Δ_0, Δ_1 et Δ_2.

I.2.2. Donner une relation entre D_n et Δ_n.

I.2.3. En déduire Δ_n puis D_n.

e4a PSI 2007

Math A , pazrties 1 à 4

Questions de cours.

1. Donner la définition du rang d'une matrice.
2. Citer sans démonstration le théorème du rang.
3. Quand dit-on que deux matrices sont semblables ? Ont-elles alors le même rang ? On ne demande pas de justification.
4. Qu'appelle-t-on polynôme annulateur d'un endomorphisme ? D'une matrice ?

Problème.

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul et $M_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel normé des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

$GL_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{C})$.

La matrice unité de cet espace sera noéte I_n et la matrice nulle O_n.

L'espace $E = \mathbb{C}^n$ est rapporté à une base $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ et on rappelle que toute matrice carrée d'ordre n représente dans cette base un endomorphisme de E appelé endomorphisme associé.

On note $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Si v est un endomorphisme de E, on rappelle que :

- v^0 est l'endomorphisme unité,
- $\forall m \in \mathbb{N},\ v^{m+1} = v \circ v^m$.
- L'endomorphisme v sera dit **nilpotent** s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $v^r = \theta$ (endomorphisme nul de E).

On note J la matrice carrée d'ordre n définie par

$$J(\lambda) = (u_{i,j}) \text{ avec } \begin{cases} \forall i \in \{1, \ldots, n-1\},\ u_{i+1,i} = 1 \\ u_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, soit $\alpha(M)$ la matrice :

$$\alpha(M) = \lim_{m\to+\infty} S_m \quad \text{avec} \quad S_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{M^k}{k!}$$

On admettra et on utilisera sans le démontrer que cette matrice existe toujours et que si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent, alors $\alpha(A+B) = \alpha(A)\alpha(B)$.

1. Quelques calculs préliminaire.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Calculer les matrices $A + I_3, (A + I_3)^2, A - 2I_3$, et préciser pour chacune des 3 matrices son rang.

2. Vérifier que $\ker(A + I_3)^2 \oplus \ker(A - 2I_3) = \mathbb{C}^3$.

3. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Quelques propriétés de la matrice J.

1. Déterminer le rang de J.

2.

2.1. Déterminer J^k pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n-1$, puis pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$.
Pour $k \leq n-1$, on exprimera les coefficients $\left(J^k\right)_{i,j}$ en utilisant le symbole de Kronecker

2.2. Vérifier que pour $k \geq 1m$, J^k est nilpotente.

3. Déterminer $\alpha(J)$ puis $U = \alpha(J) - I_n$.

4. Montrer que la somme de deux matrices nilpotentes qui commutent est encore une matrice nilpotente.
Montrer que toute combinaison linéaire de matrices nilpotentes qui commutent est encore une matrice nilpotente.

5. Montrer que U est une matrice nilpotente de rang $n-1$.

3. Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

Soit u un endomorphisme de E.

1. Prouver que $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j})$.

2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $t_m = \dim(\ker(u^m))$. Prouver l'existence de

$$r = \inf\{m \in \mathbb{N},\ t_m = t_{m+1}\}$$

3. Montrer que :

(i) $\forall m < r$, $\ker(u^m)$ est strictement inclus dans $\ker(u^{m+1})$,

(ii) $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$,

(iii) $\forall m \geq r,\ \ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$.

4. Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$.

Soit V une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, **de rang** $n-1$ et vérifiant $V^n = O_n$. On note v l'endomorphisme de E associé à V.

1. Soient p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^q à $\mathrm{Im}(v^p)$.

1.1. Déterminer $\mathrm{Im}(w)$.

1.2. Prouver que $\ker(w) \subset \ker(v^q)$.

1.3. Vérifier alors que l'on a

$$\dim(\ker(v^{p+q})) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q))$$

1.4. En déduire

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \dim(\ker(v^i)) \leq i$$

1.5. Démontrer qu'en fait $\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \dim(\ker(v^i)) = i$.

2. Prouver alors que $v^{n-1} \neq \theta$.

3. En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que

$$B_1 = (e, v(e), v^2(e), \dots, v^{n-1}(e))$$

soit une base de E.

4. Ecrire la matrice de v dans cette base

5. Montrer que deux matrices nilpotents de rang $n-1$ sont semblables.