

# ENGEES 2001 Epreuve A - Commune PC / PSI

## PREMIERE PARTIE

1)

- La fonction est continue sur  $\mathbb{R}$
- Sur  $[0, +\infty[$   $t^2 |e^{-t^2+zt}| = t^2 e^{-t^2+\operatorname{Re}(z)t} = \frac{t^2}{t^2 - \operatorname{Re}(z)t} \left( (t^2 - \operatorname{Re}(z)t) e^{t^2 + \operatorname{Re}(z)t} \right)$  de limite  $1.0 = 0$  si  $t$  tend vers  $+\infty$ .  
donc  $t \rightarrow e^{-t^2+zt}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .
- L'étude de limite est la même sur  $] -\infty, 0]$

donc

$$\boxed{t \rightarrow e^{-t^2+zt} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$$

pour la calcul on remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : -t^2 + xt = -\left(t - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{4}$$

et donc en faisant le changement de variable  $u = t - \frac{x}{2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+xt} dt = e^{x^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$$

$$\boxed{I(x) = \sqrt{\pi} e^{\frac{x^2}{4}}}$$

2) On doit dériver une intégrale à paramètre :

Soit

$$j(x, t) = e^{-(t+ix)^2} = e^{-t^2-2itx+x^2}$$

- pour tout  $t$  réel la fonction  $x \rightarrow j(x, t)$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  et admet la dérivée partielle :

$$\frac{\partial j}{\partial x}(x, t) = (-2it + 2x)e^{-t^2-2itx+x^2}$$

- pour tout  $x$  réel la fonction  $t \rightarrow j(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $t^2 |j(x, t)| = t^2 e^{-t^2+x^2} = e^{x^2} (t^2 e^{-t^2})$  admet une limite nulle quand  $t \rightarrow \pm\infty$  donc est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .
- pour tout  $x$  réel la fonction  $t \rightarrow \frac{\partial j}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $t^2 \left| \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) \right| \sim 2e^{x^2} (t^3 e^{-t^2})$  admet une limite nulle quand  $t \rightarrow \pm\infty$  donc est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .
- Domination pour  $(x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}$  : On note  $A = \max(|a|, |b|)$

$$|j(x, t)| = e^{-t^2+x^2} \leq e^{A^2} e^{-t^2}$$

$$\left| \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) \right| = |-2it + 2x| e^{-t^2+x^2} \leq 2e^{A^2} (|t| + A) e^{-t^2}$$

Ces 2 fonctions sont indépendantes de  $x$  et intégrables sur  $\mathbb{R}$  (toujours des fonctions continues négligeables devant  $1/t^2$  en  $\pm\infty$ ), ce qui établit les hypothèses de domination. D'où :  $J \in C^1(\mathbb{R})$  et :

$$J'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) dt$$

- calcul de  $J'$  :

$$\begin{aligned} J'(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2it + 2x) e^{-t^2-2itx+x^2} dt \\ &= ie^{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (-2t - 2ix) e^{-t^2-2itx} dt = ie^{x^2} \left[ e^{-t^2-2itx} \right]_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow +\infty} \end{aligned}$$

(On reconnaît la dérivée de  $t \rightarrow e^{-t^2-2itx}$ ).

Or  $|e^{-t^2} - 2ix| = e^{-t^2}$  de limite nulle en  $\pm\infty$

$$\boxed{J(x) = 0}$$

La fonction est constante, elle vaut  $\sqrt{\pi}$  en  $x = 0$  donc

$$\boxed{J(x) = \sqrt{\pi}}$$

$$\forall y \in \mathbb{R} : -t^2 + iyt = -(t - \frac{iy}{2})^2 - \frac{y^2}{4} \Rightarrow I(iy) = e^{-\frac{y^2}{4}} J(-\frac{y}{2})$$

$$\boxed{I(iy) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{y^2}{4}}}$$

3) Soit  $z = x + iy$  :

$$-t^2 + zt = -t^2 + xt + iyt = -u^2 + iyu + \frac{x^2}{4} + i\frac{xy}{2}$$

en posant  $u = t - \frac{x}{2}$ . On a donc

$$e^{-t^2+zt} = e^{-u^2+iyu} e^{\frac{x^2}{4}+i\frac{xy}{2}}$$

Si on intègre sur  $[A, B]$  on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+zt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+iyu} e^{\frac{x^2}{4}+i\frac{xy}{2}} du = e^{\frac{x^2}{4}+i\frac{xy}{2}} I(iy) = \sqrt{\pi} e^{\frac{x^2}{4}+i\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{4}}$$

$$\boxed{I(z) = \sqrt{\pi} \exp\left(\frac{z^2}{4}\right)}$$

## SECONDE PARTIE

2) La fonction  $t \mapsto e^{-ixt} f(t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  et  $|e^{-ixt} f(t)| = |f(t)|$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , donc

$$\boxed{\text{la fonction } \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt \text{ est définie pour tout réel } x.}$$

3) utilisons le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre:

- pour tout  $t$  réel la fonction  $x \mapsto e^{-ixt} f(t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- pour tout  $x$  réel la fonction  $t \mapsto e^{-ixt} f(t)$  est continue par morceau, intégrable sur  $\mathbb{R}$
- domination par  $|f|$  :  $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $|f(x, t)| = |f(t)|$ , continue par morceaux, intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

$$\boxed{\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t) dt \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

4b) C'est le théorème d'approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un **segment** par des fonctions en escalier.

Soit  $\varepsilon$  fixé, et  $g_\varepsilon$  ainsi construite :

- On a donc d'une part :

$$\int_{-n}^n e^{-ixt} |f(t) - g_\varepsilon(t)| dt \leq \varepsilon \int_{-n}^n e^{-ixt} dt \leq \frac{2\varepsilon}{x}$$

- D'autre part  $g_\varepsilon$  étant en escalier, il existe un partage  $\{a_i\}_{i=0}^k$  de  $[-n, n]$  telle que  $g_\varepsilon$  soit constante sur  $]a_i, a_{i+1}[$ . Notons  $\lambda_i$  cette constante. Donc d'après **4a**:

$$\int_{b_i}^{b_{i+1}} g_\varepsilon(t) dt = \lambda_i \int_{b_i}^{b_{i+1}} e^{-ixt} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Donc :

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} e^{-ixt} g_\varepsilon(t) dt = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \int_{b_i}^{b_{i+1}} e^{-ixt} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et donc

$$\exists X, x \geq X \implies \left| \int_{-n}^n e^{-ixt} g_\varepsilon(t) dt \right| \leq \varepsilon$$

- En réunissant les 2:

$$\exists X, x \geq X \implies \left| \int_{-n}^n e_{\varepsilon}^{-ixt} f(t) dt \right| \leq 2\varepsilon$$

- ce qui assure la limite nulle de  $\widehat{f}_n$

4c) On peut alors décomposer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt = \int_{-\infty}^{-n} e^{-ixt} f(t) dt + \int_{-n}^n e^{-ixt} f(t) dt + \int_n^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt$$

et majorer chaque morceau : Soit  $\varepsilon > 0$

- $\left| \int_{-\infty}^{-n} e^{-ixt} f(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{-n} |f(t)| dt$  ; et comme  $f$  est intégrable :  $\exists N_1, n \geq N_1 \implies \int_{-\infty}^{-n} |f(t)| dt \leq \varepsilon$  (on remarquera que  $N_1$  ne dépend pas de  $x$ )
- $\left| \int_n^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt \right| \leq \int_n^{+\infty} |f(t)| dt$  ; et comme  $f$  est intégrable :  $\exists N_2, n \geq N_2 \implies \int_n^{+\infty} |f(t)| dt \leq \varepsilon$  (on remarquera que  $N_2$  ne dépend pas de  $x$ )
- Pour un  $n \geq \max(N_1, N_2)$  on applique le résultat de la question précédente :  $\exists X, x \geq X \implies \left| \int_{-n}^n e_{\varepsilon}^{-ixt} f(t) dt \right| \leq 2\varepsilon$
- et donc pour  $x \geq X$  :  $\left| \int_{-\infty}^{+\infty} e_{\varepsilon}^{-ixt} f(t) dt \right| \leq 4\varepsilon$  ce qui assure la limite nulle :

$$\boxed{\lim_{+\infty}(\widehat{f}) = 0}$$

Le calcul est le même en  $-\infty$ .

## TROISIEME PARTIE

1) Si  $f \in S$ , pour  $p = q = 0$  on a :  $f(x) \rightarrow 0$  qd  $x \rightarrow \pm\infty$ .  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , admet une limite nulle en  $\pm\infty$  donc  $\exists A > 0, |x| \leq A \implies |f(x)| \leq 1$ .  
 $f$  est donc bornée sur  $]-\infty, -A], [A, +\infty[$  et sur  $[-A, A]$  car l'image d'un segment par une fonction continue est un segment, donc est bornée.

$$\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$$

De même  $f'(x) \rightarrow 0$  qd  $x \rightarrow \pm\infty$  donc  $f'$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $K = \sup_{\mathbb{R}} |f'|$ .  
D'après l'inégalité des accroissements finis :  $(x, y) \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$

$$\boxed{f \text{ est } K\text{-lipschitzienne}}$$

2) Si  $f \in S$ ,

- $S \subset L_{cm}^1(\mathbb{R})$  :  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et de la forme  $O(\frac{1}{x^2})$  en  $\pm\infty$ , donc  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .
- $S$  est non vide :  $\tilde{0} \in S$
- $S$  est stable par combinaisons linéaires : Soit  $f$  et  $g$  dans  $S$  et  $\lambda$  et  $\mu$  deux scalaires on a

$$\forall (p, q), \lim_{\pm\infty} \left( x^p (\lambda f + \mu g)^{(q)}(x) \right) = \lambda \lim_{\pm\infty} \left( x^p f^{(q)}(x) \right) + \mu \lim_{\pm\infty} \left( x^p g^{(q)}(x) \right) = 0$$

- donc  $S$  est un SEV de  $L_{cm}^1(\mathbb{R})$ .

3) La fonction  $A(x) = e^{-ax^2}$  est bien  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et :

- $x^p A(x) = x^p e^{-ax^2} = (x^2)^{p/2} e^{-ax^2}$  tend vers 0 en  $\pm\infty$ , car l'exponentielle de  $x^2$  l'emporte sur la puissance.
- $A'(x) = -2ax\varphi(x)$  ; donc  $x^p A'(x) = -2a(x^2)^{(p+1)/2} e^{-x^2} \rightarrow_{\pm\infty} 0$
- par récurrence on montre que :  $\forall q, A^{(q)}(x) = P_q(x)e^{-x^2}$  où  $P_q$  est une fonction polynomiale. C'est vrai pour  $q = 0$  et  $q = 1$ . Et si  $A^{(q)}(x) = P_q(x)e^{-x^2}$  alors  $A^{(q+1)}(x) = (P_q'(x) - 2xP_q(x))e^{-x^2}$  et  $P_{q+1} = P_q' - 2XP_q$  est bien un polynôme. Notons  $Q$  son degré et  $\lambda_Q$  son coefficient dominant.

- L'exponentielle l'emporte sur toute puissance donc  $\forall p, q \in \mathbf{N}$ ,  $x^p A^{(q)}(x) \sim \lambda_Q x^{p+Q} e^{-x^2} = \lambda_Q (x^2)^{\frac{p+Q}{2}} e^{-x^2} \rightarrow_{\pm\infty} 0$ .  
Donc

$$\boxed{t- > e^{-t^2} \in S}$$

4) Si  $f \in S$ , alors  $f'$  est  $C^\infty$  et  $\forall p, q \in \mathbf{N}$ ,  $x^p (f')^{(q)}(x) = x^p f^{(q+1)}(x) \rightarrow_{\pm\infty} 0$ , donc

$$\boxed{f' \in S}$$

Notons  $g(x) = xf(x)$ :  $g$  est  $C^\infty$ ; et  $\forall p \in \mathbf{N}$ ,  $x^p g(x) = x^{p+1} f(x) \rightarrow_{\pm\infty} 0$   
et  $\forall q \geq 1$ , la formule de Leibniz donne  $(g)^{(q)}(x) = x f^{(q)}(x) + q f^{(q-1)}(x)$  et donc :

$$\lim_{\pm\infty} (x^p g^{(q)}(x)) = \lim_{\pm\infty} (x^p [x f^{(q)}(x) + q f^{(q-1)}(x)]) = 0$$

Donc

$$\boxed{g \in S}$$

$f \in S \Rightarrow f' \in S$ . Donc par récurrence  $f^{(q)} \in S$  :

- vrai pour  $q = 0$  et pour  $q = 1$
- Si  $f^{(q)} \in S$  alors  $(f^{(q)})' \in S$  en appliquant le résultat précédent à  $f^{(q)}$ .

De même par récurrence

$$\boxed{x^p f^{(q)} \in S}$$

5) Posons  $F(x) = e^{-iax} f(x)$ .  $F$  est  $C^\infty$

- $\lim_{\pm\infty} (x^p F(x)) = 0$  car  $|x^p F(x)| = |x^p f(x)|$  de limite nulle.
- $F'(x) = e^{-iax} [-iaf(x) + f'(x)]$  et  $g_1 = -iaf + f'$  est une combinaison linéaire d'éléments de  $S$ , ( $f \in S$  par hypothèse et  $f' \in S$  par la question précédente) donc appartient à  $S$ .

Donc  $\lim (x^p F'(x)) = \lim (x^p g_1(x)) = 0$

- Par récurrence  $F^{(q)}(x) = e^{-iax} g_q(x)$  avec  $g_q \in S$  :

vrai pour  $q = 0$  et  $q = 1$ .

Si  $F^{(q)}(x) = e^{-iax} g_q(x)$  avec  $g_q \in S$  alors  $F^{(q+1)}(x) = e^{-iax} (-ia g_q(x) + g'_q(x))$  et  $g_{q+1} = -ia g_q + g'_q \in S$  par combinaison linéaire.

- Enfin  $\forall p$ ,  $\lim_{\pm\infty} (x^p F^{(q)}(x)) = \lim_{\pm\infty} (x^p g_q(x)) = 0$  Donc

$$\boxed{\psi \in S}$$

## QUATRIEME PARTIE

1) Utilisons le théorème de dérivation des intégrales à paramètres:

- pour tout  $t$   $x- > \varphi(x, t) = e^{-ixt} f(t)$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = -ite^{-ixt} f(t)$ .
- pour tout  $x$  réel  $t- > e^{-ixt} f(t)$  et  $t- > -ite^{-ixt} f(t)$  sont continues sur  $\mathbb{R}$
- et on a les dominations (qui assurent l'intégrabilité) :

-  $|e^{-ixt} f(t)| \leq |f(t)|$  intégrable sur  $\mathbb{R}$  (D'après III 2 car  $f \in S$ )

-  $|-ite^{-ixt} f(t)| \leq |tf(t)|$  intégrable sur  $\mathbb{R}$  (car  $t- > tf(t) \in S$  d'après III 4)

On en déduit que  $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $(\widehat{f})'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-ixt} f(t) dt$

C'est la transformée de Fourier de  $t- > -itf(t)$  qui appartient à  $S$  d'après III 4

$$\boxed{(\widehat{f})' = -\widehat{itf(t)}}$$

Par conséquent  $(\widehat{f})'$  est à son tour de classe  $C^1$  et par récurrence  $(\widehat{f})$  est  $C^n$  et  $(\widehat{f})^{(n)}$  est la transformée de Fourier de  $t- > f_n(t) (-itf(t))^n$  élément de  $S$

• vrai pour  $n = 0$  et  $n = 1$

• si c'est vrai pour  $n$  On a  $(\widehat{f})^{(n)} = \widehat{f}_n$ . Comme  $\widehat{f}_n \in S$  on a  $(\widehat{f}_n)$  de classe  $C^1$  et  $(\widehat{f}_n)'$  est la transformée de Fourier de  $t \rightarrow -itx f_n(t) = f_{n+1}(t) \in S$ .  $(\widehat{f})^{(n)}$  est donc  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $(\widehat{f})^{(n+1)}$  est la transformée de Fourier de  $f_{n+1} \in S$ .

$$\boxed{\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})}$$

2) On intègre par parties, en utilisant :  $|e^{-ixt} f(t)| = |f(t)| \rightarrow 0$  qd  $x \rightarrow \pm\infty$  car  $f \in S$  :

$$(\widehat{f'}) (x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f'(t) dt = \lim_{\substack{B \rightarrow +\infty \\ A \rightarrow -\infty}} \left( [e^{-ixt} f(t)]_A^B - \int_A^B -ixe^{-ixt} f(t) dt \right) = ix \lim_{\substack{B \rightarrow +\infty \\ A \rightarrow -\infty}} \left( \int_A^B e^{-ixt} f(t) dt \right) = ix \widehat{f}(x)$$

$$\boxed{(\widehat{f'}) (x) = ix \widehat{f}(x)}$$

donc  $(\widehat{f^{(p)}})(x) = (ix)^p \widehat{f}(x)$ . On a vu en **II 4** que  $\lim_{\pm\infty} (\widehat{f}(x)) \rightarrow 0$ . On applique ceci à  $f^{(p)}$ , d'où :  $\lim_{\pm\infty} (x^p \widehat{f}(x)) = \lim_{\pm\infty} (\widehat{f^{(p)}})(x) = 0$  car  $f^{(p)} \in S$  (**III 4**).

Comme pour tout  $n$   $(\widehat{f})^{(n)}$  est aussi la transformée de Fourier de  $f_n$  élément de  $S$  on a la même propriété pour  $(\widehat{f})^{(n)}$   
Conclusion :

$$\boxed{f \in S \Rightarrow \widehat{f} \in S}$$

3)

$$(\widehat{g_y})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} g_y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it(x+y)} f(t) dt = \widehat{f}(x+y)$$

4)

$$f(x) = e^{-ax^2} \Rightarrow \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt-at^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix \frac{y}{\sqrt{a}} - u^2} \frac{du}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} I\left(-\frac{ix}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}$$

$$F(x) = e^{-ax^2-ixy} = e^{-ixy} f(x) \Rightarrow \widehat{F}(x) = \widehat{f}(x+y) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{(x+y)^2}{4a}}.$$