

## PARTIE I

I.1) On remarque que les trois premières colonnes de  $M$  sont égales et non proportionnelles à la dernière . Donc  $rg(M) = rg({}^tM) = 2$  . Les noyaux et images demandés sont de dimension 2.

a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  sont deux vecteurs non colinéaires du noyau . donc d'après la dimension , c'est une base du noyau.

$$\text{Base de } \ker(M) : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de même

$$\text{Base de } \ker({}^tM) : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les dimensions étant égales si il y a une inclusion, il y a égalité. Or  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  ne peut pas être élément de  $\ker(M)$  par tous

les éléments de  $\ker(M)$  on une 4-ème coordonnée nulle

pas d'inclusion

b) les deux vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  sont deux vecteurs non colinéaires de l'image et donc avec la dimension :

$$\text{Base de } \text{Im}(M) : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

en prenant les colonnes 2 et 3 (plus simples)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  forment une base de l'image de  $\text{Im}({}^tM)$

$$\text{base de } \text{Im}({}^tM) : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tout vecteur de  $\text{Im}({}^tM)$  a ses deux premières coordonnées égales . Ce n'est pas le cas des vecteurs de base de  $\text{Im}(M)$ . L'une des inclusion est fausse, et comme pour le noyau, l'autre aussi.

pas d'inclusion

I.2)  
a) remarque :  ${}^tAA$  est carrée d'ordre  $p$  et  $A{}^tA$  est carrée d'ordre  $n$ .

$$X \in \ker(A) \implies AX = 0 \implies {}^tAAX = 0 \implies X \in \ker({}^tAA)$$

$$X \in \ker({}^tAA) \implies {}^tAAX = 0 \implies {}^tX{}^tAAX = 0 \implies \|AX\|^2 = 0 \implies AX = 0 \implies X \in \ker(A)$$

donc on a :

$$\ker(A) = \ker({}^tAA)$$

. En remplaçant  $A$  par  ${}^tA$  :

$$\boxed{\ker({}^tA) = \ker(A {}^tA)}$$

b) D'après le théorème du rang :  $rg({}^tAA) = p - \dim(\ker({}^tAA)) = p - \dim(\ker(A)) = rg(A)$  et en remplaçant  $A$  par  ${}^tA$   $rg(A {}^tA) = rg({}^tA)$ . Et comme  $rg({}^tA) = rg(A)$  :

$$\boxed{rg({}^tAA) = rg(A {}^tA) = rg(A)}$$

c)  $Y \in \text{Im}({}^tAA) \Rightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ ,  $Y = {}^tAAX \Rightarrow \exists Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $Y = {}^tAZ \Rightarrow Y \in \text{Im}({}^tA)$ . On a inclusion, et par égalité des dimensions (I.2.b), égalité des deux sous espaces vectoriels.  
donc

$$\boxed{\text{Im}({}^tAA) = \text{Im}({}^tA)}$$

En remplaçant  $A$  par  ${}^tA$

$$\boxed{\text{Im}(A {}^tA) = \text{Im}(A)}$$

I.3) Même si le sujet ne le demande pas il est souhaitable (indispensable) de regarder ce qui se passe si  $n = 2$  ou  $3$  et  $q = 2$  ou  $3$ .

a) Soit  $c_{i,j}$  le terme de la ligne  $i$ , colonne  $j$  de  ${}^tBB$  :  $c_{i,j} = \sum_{k=1}^q b_{k,i}b_{k,j} = \langle x_i, x_j \rangle$  donc

$$\boxed{{}^tBB = G}$$

D'après 2)b),  $rg(G) = rg(B)$  et par définition de  $B$   $rg(B) = rg(S)$

$$\boxed{rg(B) = rg(S)}$$

b)  $G$  est symétrique réelle donc diagonalisable.

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $G$  et  $X$  un vecteur propre associé :

$$GX = \lambda X \Rightarrow {}^tX {}^tBBX = \lambda {}^tXX \Rightarrow \|BX\|^2 = \lambda \|X\|^2$$

$X$  n'est pas nul donc  $\|X\|^2 \neq 0$ , donc

$$\boxed{\lambda \geq 0}$$

c)  $G$  étant diagonalisable, son déterminant est le produit des valeurs propres, celles-ci sont toutes positives donc

$$\boxed{\det(G) \geq 0}$$

$\det(G) = 0 \Leftrightarrow rg(G) < q \Leftrightarrow rg(S) < q$  d'après l'égalité du I.2.a). Le rang est strictement inférieur au cardinal si et seulement si la famille est liée.

$$\boxed{\det(G) = 0 \iff S \text{ lié}}$$

d) Si  $q = 2$  :  $\det(G) = \begin{vmatrix} \|x_1\|^2 & \langle x_1, x_2 \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \|x_2\|^2 \end{vmatrix} = \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - (\langle x_1, x_2 \rangle)^2$

I.4) Il suffit de prouver le résultat en ajoutant à un vecteur un multiple d'un autre. Comme pour le pivot de Gauss le résultat est alors évident.

On remplace donc  $x_i$  par  $x_i + \lambda_j x_j$ . La matrice  $G$  est modifiée sur la ligne  $i$  et sur la colonne  $i$ .

On vérifie que l'opération obtenue est la même que le pivot de Gauss sur la matrice  $L_i \leftarrow L_i + \lambda_j L_j$  puis  $C_i \leftarrow C_i + \lambda_j L_j$  :

- pour les termes non diagonaux de la ligne  $i$  on a :  $g_{i,k} = \langle x_i, x_k \rangle$  est remplacé lors du premier pivot par  $g_{i,k} + \lambda_j g_{j,k} = \langle x_i, x_j \rangle + \lambda_j \langle x_j, x_k \rangle = \langle x_i + \lambda_j x_j, x_k \rangle$  puis n'est plus modifié
- pour les termes non diagonaux de la colonne  $i$  on a pas de modification lors du premier pivot, et le même type d'opération lors du second
- pour le terme diagonale  $g_{i,i}$  est remplacé par  $g_{i,i} + \lambda_j g_{j,i}$  puis par  $(g_{i,i} + \lambda_j g_{j,i}) + \lambda_j (g_{i,j} + \lambda_j g_{j,j})$  (**les termes de la lignes sont tous modifiés par le premier Pivot**). On vérifie alors

$$(g_{i,i} + \lambda_j g_{j,i}) + \lambda_j (g_{i,j} + \lambda_j g_{j,j}) = \langle x_i, x_i \rangle + \lambda_j \langle x_i, x_j \rangle + \lambda_j \langle x_j, x_i \rangle + \lambda_j^2 \langle x_j, x_j \rangle = \langle x_i + \lambda_j x_j, x_i + \lambda_j x_j \rangle$$

- Le pivot de Gauss laisse invariant le déterminant donc  $\gamma(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \gamma(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \lambda_j x_j, x_{i+1}, \dots, x_n)$

Difficile à rédiger. Donner le principe du pivot puis rédiger un exemple comme ci dessous avec  $n$  petit doit suffire au correcteur.

- Si  $n = 3$  et si on remplace  $x_1$  par  $x_1 + \lambda x_2$  on a :

$$\begin{aligned}
 G &= \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \langle x_1, x_3 \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \langle x_2, x_3 \rangle \\ \langle x_3, x_1 \rangle & \langle x_3, x_2 \rangle & \langle x_3, x_3 \rangle \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle + \lambda \langle x_1, x_2 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \langle x_1, x_3 \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle + \lambda \langle x_2, x_2 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \langle x_2, x_3 \rangle \\ \langle x_3, x_1 \rangle + \lambda \langle x_3, x_2 \rangle & \langle x_3, x_2 \rangle & \langle x_3, x_3 \rangle \end{pmatrix} \\
 &\longrightarrow \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle + \lambda \langle x_1, x_2 \rangle + \lambda (\langle x_2, x_1 \rangle + \lambda \langle x_2, x_2 \rangle) & \langle x_1, x_2 \rangle + \lambda \langle x_2, x_2 \rangle & \langle x_1, x_3 \rangle + \lambda \langle x_2, x_3 \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle + \lambda \langle x_2, x_2 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \langle x_2, x_3 \rangle \\ \langle x_3, x_1 \rangle + \lambda \langle x_3, x_2 \rangle & \langle x_3, x_2 \rangle & \langle x_3, x_3 \rangle \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \langle x_1 + \lambda x_2, x_1 + \lambda x_2 \rangle & \langle x_1 + \lambda x_2, x_2 \rangle & \langle x_1 + \lambda x_2, x_3 \rangle \\ \langle x_2, x_1 + \lambda x_2 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \langle x_2, x_3 \rangle \\ \langle x_3, x_1 + \lambda x_2 \rangle & \langle x_3, x_2 \rangle & \langle x_3, x_3 \rangle \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

I.5)

a) On applique I.4) car  $p_L(x_1)$  est une combinaison linéaire de  $x_2, \dots, x_q$

$$\gamma(x_1, \dots, x_q) = \gamma(h_1 + p_L(x_1), \dots, x_q) = \gamma(h_1, \dots, x_q)$$

. Or  $h_1 \in L^\perp$  donc  $\langle h_1, x_j \rangle = 0$  pour tout  $j \geq 2$ . La première ligne (et colonne) de  $\gamma(h_1, \dots, x_q)$  a tous ses termes nuls sauf le premier qui vaut  $\langle h_1, h_1 \rangle$ . Les termes des lignes ou colonnes suivants sont  $\langle x_i, x_j \rangle$  avec  $i \geq 2$  et  $j \geq 2$ . La matrice est diagonale par blocs et donc par produit des déterminants des blocs diagonaux :

$$\boxed{\gamma(x_1, \dots, x_q) = \|h_1\|^2 \gamma(x_2, \dots, x_q)}$$

b)

i)  $h_1$  est orthogonal à  $p_L(x_1)$ , en appliquant le théorème de Pythagore :  $\|x_1\|^2 = \|h_1\|^2 + \|p_L(x_1)\|^2$  donc  $\gamma(x_1) = \|x_1\|^2 \geq \|h_1\|^2$ . De plus  $\gamma(x_2, \dots, x_q) \geq 0$  donc : d'après le résultat précédent :

$$\boxed{\gamma(x_1, \dots, x_q) \leq \gamma(x_1) \gamma(x_2, \dots, x_q)}$$

Si  $S$  est libre alors les termes sont non nuls donc l'égalité a lieu si et seulement si  $\|h_1\|^2 = \gamma(x_1)$  si et seulement si  $p_L(x_1) = 0$ , si et seulement si  $x_1 \in L^\perp$ .

remarque : mais si  $(x_2, \dots, x_p)$  est lié l'égalité est toujours vérifiée.

ii) On procède par récurrence sur  $q$  : pour tout système libre de  $q$  vecteurs on a  $\gamma(x_1, \dots, x_q) \leq \gamma(x_1) \dots \gamma(x_q)$  avec égalité si et seulement si les  $(x_i)$  sont deux à deux orthogonaux :

- vrai si  $n = 1$  et  $n = 2$  d'après

- si c'est vrai pour  $q - 1$  vecteurs on suppose  $\gamma(y_1, \dots, y_{q-1}) \leq \gamma(y_1) \dots \gamma(y_{q-1})$

on a alors :  $\gamma(x_1, \dots, x_q) \leq \gamma(x_1) \gamma(x_2, \dots, x_q) \leq \gamma(x_1) \dots \gamma(x_q)$  en prenant  $y_i = x_{i-1}$

Si  $\gamma(x_1, \dots, x_q) = \gamma(x_1) \dots \gamma(x_q)$  alors comme  $\gamma(x_1, \dots, x_q) \leq \gamma(x_1) \gamma(x_2, \dots, x_q) \leq \gamma(x_1) (\gamma(x_2) \dots \gamma(x_q))$  toutes les inégalités sont des égalités et donc :

–  $\gamma(x_1, \dots, x_q) = \gamma(x_1) \gamma(x_2, \dots, x_q)$  et  $x_1$  est orthogonal à tous les autres  $(x_i)$

–  $\gamma(x_2, \dots, x_q) \leq \gamma(x_1, \dots, x_q) = (\gamma(x_2) \dots \gamma(x_q))$  en simplifiant par  $\gamma(x_1) \neq 0$  donc les  $(x_i)_{i=2}^q$  sont deux à deux orthogonaux par l'hypothèse de récurrence.

Si les  $(x_i)_{i=1}^q$  sont liés  $0 \leq \gamma(x_1) \dots \gamma(x_q)$  reste vrai mais on a égalité si et seulement si l'un des  $(x_i)$  est nul, sans condition sur les autres.

$$\boxed{\text{pour une famille libre } \gamma(x_1, \dots, x_q) \leq \gamma(x_1) \dots \gamma(x_q) \text{ avec égalité ssi les } (x_i) \text{ sont deux à deux orthogonaux}}$$

6)

a) Les vecteurs colonnes de  $A$  sont libres puisque  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ . On pose  $G = {}^t A A$  :

On a donc  $(\det(A))^2 = \det(G) = \gamma(c_1, \dots, c_n)$ . Or si on a déjà vu que pour un seul vecteur  $\gamma(x_i) = \|x_i\|^2$  on trouve grâce au I.5  $\gamma(c_1, \dots, c_n) \leq \|c_1\|^2 \dots \|c_n\|^2$  d'où

$$\boxed{|\det(A)| \leq \prod_{k=1}^n \|c_k\|}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si  $c_1, \dots, c_n$  sont 2 à 2 orthogonaux.

b)  $\|c_k\|^2 = \sum_{i=1}^n (a_{i,k})^2 \leq n$  donc  $|\det(A)| \leq \prod_{k=1}^n \|c_k\| \leq (\sqrt{n})^n$ .

L'égalité entre les termes extrême a lieu si et seulement si on a deux égalités dans la formule :

- d'une part  $|\det(A)| = \prod_{k=1}^n \|c_k\|$  ce qui équivaut à dire que les vecteurs colonnes sont 2 à 2 orthogonaux.

- d'autre part  $\prod_{k=1}^n \|c_k\| = (\sqrt{n})^n$ . Et comme chaque facteur est  $\leq \sqrt{n}$  la seule possibilité (nécessaire et suffisante) est  $\forall k, \|c_k\| = \sqrt{n}$  et comme tous les termes de la somme sont  $\leq 1$  ceci équivaut à :  $\forall k, \forall i, a_{i,k}^2 = 1$

$$\boxed{\forall (i, j), |a_{i,j}| \leq 1 \Rightarrow \det(A) \leq (\sqrt{n})^n \text{ avec égalité ssi les colonnes de } A \text{ sont 2 à 2 orthogonales et } a_{i,j} = \pm 1}$$

## PARTIE II

II.1) 8 Eléments de  $H_2$  :  $\pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  ;  $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  ;  $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  ;  $\pm \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

II.2)

a) Les colonnes de  $A$  sont deux à deux orthogonales et de norme  $\sqrt{n}$ . donc  $\frac{A}{\sqrt{n}}$  est une matrice orthogonale. On a donc  ${}^t \left( \frac{A}{\sqrt{n}} \right) \cdot \left( \frac{A}{\sqrt{n}} \right) = I_n$ . d'où :

$$\boxed{{}^t AA = nI_n}$$

b et c) Réciproquement si  ${}^t AA = nI_n$  la matrice  $\frac{A}{\sqrt{n}}$  est orthogonale. Ses colonnes (donc aussi celles de  $A$ ) sont 2 à 2 orthogonales.

Si on impose des coefficients dans  $\{-1, 1\}$  alors on a bien une matrice de  $\mathcal{H}_n$ . Sinon il reste bien des possibilités par exemple  $A = \sqrt{n}I_n$

II.3) prendre un ou deux autres exemples, les traiter à la main sur des matrices  $2 \times 2$  ou  $3 \times 3$  me semble indispensable à

la compréhension du sujet. par exemple  $P^{Id} = I_n$  si  $n = 3$  et  $\sigma = \begin{cases} 1- > 2 \\ 2- > 3 \\ 3- > 1 \end{cases}$  alors  $P^\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

a) On effectue un produit à gauche par une matrice inversible : c'est un pivot de Gauss sur les lignes.

On pose  $A' = {}^t P^{(\sigma)} A$ .  $\forall i, j, a'_{i,j} = \sum_{k=1}^n p_{k,i}^\sigma a_{k,j} = \sum_{k=1}^n \delta_{k,\sigma(i)} a_{k,j} = a_{\sigma(i),j} + \sum 0 = a_{\sigma(i),j}$ . La ligne  $i$  de  $A'$  est la ligne  $\sigma(i)$  de  $A$ .  ${}^t P^{(\sigma)} A$  est obtenue en faisant la permutation  $\sigma$  sur les lignes de  $A$ .

b) idem en posant  $A'' = AP^{(\sigma)}$ .  $\forall i, j, a''_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} p_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}$ . La colonne  $j$  de  $A''$  est la colonne  $\sigma(j)$  de  $A$ .  $AP^{(\sigma)}$  est obtenue en faisant la permutation  $\sigma$  sur les colonnes de  $A$ .

c) On remarque que les colonnes de  $P^\sigma$  sont deux à deux orthogonales et de norme 1, donc  $P^\sigma \in O(n)$  et  ${}^t P^\sigma \cdot P^\sigma = I_n$

- On a  ${}^t A' A' = {}^t AP^\sigma \cdot {}^t P^\sigma A' = {}^t A A = nI_n$ . de plus les coefficients de  $A'$  sont ceux de  $A$  donc dans  $\{-1, 1\}$  :  $A' \in \mathcal{H}_n$
- de même pour  $A''$  :  ${}^t A'' A'' = {}^t P^\sigma \cdot {}^t A A \cdot P^\sigma = n {}^t P^\sigma \cdot P^\sigma = nI_n$  et les coefficients sont dans  $\{-1, 1\}$
- $\Delta$  est diagonale à coefficients dans  $\pm 1$ , donc les coefficients de  $A\Delta$  et ceux de  $\Delta A$  sont égaux à  $\pm 1$ . De plus  $\Delta$  est aussi une matrice orthogonale. On a donc les mêmes calculs qu'avec  $P^\sigma$  ..

$$\boxed{A \in \mathcal{H}_n \Rightarrow \forall \sigma, AP^\sigma \in \mathcal{H}_n, {}^t P^\sigma A \in \mathcal{H}_n, \forall \Delta \in \mathcal{D}_n, A\Delta \in \mathcal{H}_n \text{ et } \Delta A \in \mathcal{H}_n}$$

II.4)

a)

- Les coefficients de  $A$  et de  $B$  valent  $\pm 1$ , donc ceux de  $A \otimes B$  aussi par produit.

• On a  ${}^t (A \otimes B) = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot {}^t B & a_{21} \cdot {}^t B \\ a_{12} \cdot {}^t B & a_{22} \cdot {}^t B \end{pmatrix}$  d'où  ${}^t (A \otimes B) \cdot (A \otimes B) = \begin{pmatrix} (a_{1,1}^2 + a_{2,1}^2) nI_n & (a_{1,1}a_{1,2} + a_{2,1}a_{2,2}) nI_n \\ (a_{1,2}a_{1,1} + a_{2,2}a_{2,1}) nI_n & (a_{1,2}^2 + a_{2,2}^2) nI_n \end{pmatrix}$   
car  ${}^t BB = nI_n$

Or  $A \in \mathcal{H}_2$  donc  ${}^t A \cdot A = 2I_2$  d'où  $\begin{pmatrix} a_{1,1}^2 + a_{2,1}^2 & a_{1,1}a_{1,2} + a_{2,1}a_{2,2} \\ a_{1,2}a_{1,1} + a_{2,2}a_{2,1} & a_{1,2}^2 + a_{2,2}^2 \end{pmatrix} = 2I_2$  et donc  ${}^t (A \otimes B) \cdot (A \otimes B) = \begin{pmatrix} 2nI_n & 0 \\ 0 & 2nI_n \end{pmatrix} = 2nI_{2n}$

$$\boxed{(A \otimes B) \in \mathcal{H}_{2n}}$$

b)  $H_2 \neq \emptyset$ , soit  $A \in \mathcal{H}_2$  : on a  $A_2 = A \otimes A \in \mathcal{H}_4$  et par récurrence si  $A_{n-1} \in \mathcal{H}_{2^{n-1}}$  alors  $A_n = A \otimes A_{n-1} \in \mathcal{H}_{2^n}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{H}_{2^n} \neq \emptyset}$$

c) On construit une matrice de  $\mathcal{H}_4$  qui ne soit pas du type précédent  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  qui n'est pas du type  $(A \otimes B)$

car  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

pour trouver une telle matrice on peut partir d'une matrice  $(A \otimes A)$  puis permuter des colonnes et/ou des lignes

II.5)  $n$  est dans  $E$  donc  $\mathcal{H}_n$  est non vide. soit  $A \in \mathcal{H}_n$ .

a) pour avoir que des 1 sur la première colonne on effectue un pivot de Gauss sur les lignes en multipliant  $A$  par une matrice  $\Delta \in \mathcal{D}_n$  bien choisi :

- Si le premier coefficient de la ligne  $i$  est un 1 : on laisse  $L_i$  inchangé. On met donc un 1 sur la diagonale de  $\Delta$

- Si le premier coefficient de la ligne  $i$  est un  $-1$  : on multiplie  $L_i$  par  $-1$ . On met donc un  $-1$  sur la diagonale de  $\Delta$

On a construit une matrice  $A' = \Delta A$  qui est dans  $\mathcal{H}$  (question II.3.c) et qui a une première colonne constituée uniquement de 1.

On peut préciser  $\Delta : \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \text{ et } a_{i,1} = 1 \\ -1 & \text{si } i = j \text{ et } a_{i,1} = -1 \end{cases}$

Si on regarde le produit scalaire des deux premières colonnes de  $A'$  on trouve  $\sum_{j=1}^n a'_{1,j} a'_{2,j} = \sum_{i=1}^n a'_{2,j}$ . Si on a dans la deuxième colonne  $m$  coefficients égaux à 1 et donc  $n - m$  égaux à  $-1$ , on a  $\sum_{i=1}^n a'_{2,j} = k - (n - k) = 2m - n$ . On veut l'orthogonalité donc  $n = 2k$  est pair.

Si  $E_n$  est non vide  $n$  est pair

b) Dans la matrice  $A'$  on peut permuter les lignes en multipliant à droite par  $P^\sigma$ . On peut choisir cette permutation pour placer tous les 1 dans la première moitié des lignes :

Si pour  $i \leq m$   $a_{i,2} = -1$  alors il existe  $j > m$  tel que  $a_{j,2} = 1$  (sinon il y a trop de  $-1$ ) et on permute  $L_i$  et  $L_j$ . et on itère pour chaque  $-1$  à déplacer.

On a construit une matrice  $A'' = P^\sigma A'$  n'ayant que des 1 sur la première colonne des 1 sur les  $m$  premières lignes de la seconde et des  $-1$  après.

. D'après II.3.C)  $A'' \in H_n$ . On effectue alors les produit scalaire des colonnes de  $A''$ :

- colonnes 1 et 3 :  $\sum_{k=1}^{2m} a''_{k,3} = 0$

- colonnes 2 et 3 :  $\sum_{k=1}^m a''_{k,3} - \sum_{k=m+1}^{2m} a''_{k,3} = 0$

- On a donc  $\sum_{k=1}^m a''_{k,3} = \sum_{k=m+1}^{2m} a''_{k,3} = 0$  et comme à la question II.5.a)  $m$  est pair:

Si  $E_n$  est non vide  $n$  est multiple de 4

On voit venir la récurrence qui n'est pas demandée :  $n \in E \iff n$  est une puissance de 2.

## PARTIE III

III.1)  $S$  est symétrique réelle donc diagonalisable et  $\exists P \in O(n)$  et  $D$  diagonale tels que  $S = PDP^{-1} = PD^tP$

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $S$  il existe une matrice colonne  $X$  non nulle telle que  $SX = \lambda X$  on a donc  ${}^tX S X = \lambda {}^tX X = \lambda \|X\|^2$ . Donc  $(X \neq \vec{0}) \lambda = \frac{{}^tX S X}{\|X\|^2} > 0$  par définition de  $S_n^{++}$

Réciproquement si tous les termes diagonaux sont positifs on a pour chaque matrice propre  $X_i$  élément d'une base orthonormale qui diagonalise  $S : X_i = \lambda_i X_i$  avec  $\lambda_i > 0$

donc si  $X = \sum \alpha_i X_i$ ,

$${}^tX S X = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i {}^tX_i \right) S \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j \right) = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \lambda_j {}^tX_i X_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \lambda_j \text{ car la base est orthonormale}$$

On a donc  ${}^tX S X > 0$  si  $X \neq 0$

$\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) (S \in S_n^{++} \iff Sp_C(S) \subset \mathbb{R}^{+*})$

III.2)

a)

- $S = {}^t M M$  est symétrique réelle

- $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : {}^tX S X = {}^tX {}^t M M X = {}^t(MX) \cdot (MX) = \|MX\|^2$ . c'est donc une quantité qui est positive. De plus elle est nulle si et seulement si  $MX = 0$  donc si  $X = 0$  car  $M$  est inversible.

- b) On peut diagonaliser  ${}^tMM$  dans une base orthonormale il existe  $D$  diagonale à coefficients positifs tel que  ${}^tMM = PDP^{-1}$ . On pose  $D = \text{diag}(d_i)$ , on prend  $\Delta = \text{diag}(\sqrt{d_i})$  alors  $S = P\Delta P^{-1}$  vérifie  $S^2 = {}^tMM$  (ça doit vous rappeler un devoir sur les racines carrées de matrices) De plus  $P^{-1} = {}^tP$  donc  $S = P\Delta^tP \implies {}^tS = P^t\Delta^tP = S$  car  $\Delta$  est diagonale.
- c)  $\det(S) = \det(\Delta) = \sqrt{\det(D)} \neq 0$  donc  $S$  est inversible.  
 ${}^t(MS^{-1}).MS^{-1} = {}^t(S^{-1}) {}^tM M^t(S^{-1}) = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$  car  $S^{-1}$  est symétrique ( ${}^tS = S \implies {}^t(S^{-1}) = S^{-1}$ ) donc

$$\boxed{MS^{-1} \in O_n}$$

- d) On suppose  $R = MS^{-1}$  :

$$\boxed{M = RS \text{ avec } R \in O_n \text{ et } S \in S_n^{++}}$$

III.3)

- a)  $\Sigma$  et  $D$  sont semblables donc ont la même trace :  $\text{Tr}(\Sigma) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

b)  $\Sigma$  est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormale. Quitte à changer l'ordre des vecteurs on peut supposer que la matrice diagonale est  $D$ .

$\exists P \in O_n$  tel que  $\Sigma = PDP^{-1} \implies Q\Sigma = QPDP^{-1} \implies \text{Tr}(Q\Sigma) = \text{Tr}(QPDP^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1}QPD)$  car  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

Si on pose  $Q_1 = P^{-1}QP$  on a une matrice orthogonale car  $P$  et  $Q$  sont orthogonales ( $O(n)$  est un groupe donc stable par produit et inverse)

$$\boxed{\forall Q \in O(n), \exists Q_1 \in O(n) : \text{Tr}(Q\Sigma) = \text{Tr}(Q_1D)}$$

$\text{Tr}(Q_1D) = \sum_{i=1}^n q_{i,i}^{(1)} \lambda_i$ . Pour tout  $i$ ,  $\lambda_i \geq 0$

On veut  $\sum_{i=1}^n q_{i,i}^{(1)} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i$  : Il suffit de montrer que les  $q_{i,i}^{(1)}$  sont inférieurs à 1. Or  $Q_1$  est orthogonale : donc  $\forall i$   
 $\sum_{j=1}^n [q_{j,i}^{(1)}]^2 = 1$  et donc  $\forall i, j \left| q_{i,j}^{(1)} \right| \leq 1$  en particulier :  $q_{i,i}^{(1)} \leq 1$ . On a donc  $\text{Tr}(Q_1D) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i$  d'où

$$\boxed{\text{Tr}(Q\Sigma) \leq \text{Tr}(\Sigma)}$$

- c) Pour  $Q = I_n$  on a égalité donc

$$\boxed{\sup_{Q \in O_n} \text{Tr}(Q\Sigma) = \text{Tr}(\Sigma)}$$

III.4) On remarque que  $f(A)$  est la somme de tous les coefficients situés au dessus de la diagonale.

- a) Il y a  $\frac{1}{2}n(n+1)$  termes au-dessus de la diagonale, tous égaux à  $\pm 1$  donc  $f(A) \leq \frac{1}{2}n(n+1)$ .

L'ensemble  $\{f(A), A \in H_n\}$  est une partie majorée de  $\mathbb{R}$  donc admet une borne supérieure.

- b) Soit  $B = AT : b_{i,i} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} t_{j,i} = \sum 0 + \sum_{j=i}^n a_{i,j}$  donc  $\text{Tr}(B) = f(A)$

- c)  $\det(T) = 1$  donc  $T \in GL_n(\mathbb{R})$ . D'après III.2)  $\exists R \in O_n$  et  $S \in S_n^{++}$  tel que  $T = RS$ . Alors  $f(A) = \text{Tr}(ARS)$ .

Posons  $A' = \frac{1}{\sqrt{n}}A$ . On a vu en II que  $A' \in O_n$  et  $f(A) = \text{Tr}(\sqrt{n}A'RS) = \sqrt{n}\text{Tr}(A'RS)$ .

$A'R \in O_n$  et  $S \in S_n^+$  donc d'après 3) :  $f(A) \leq \sqrt{n}\text{Tr}(S)$ . C'est vrai pour toute matrice de  $\mathcal{H}_n$ ;  $\sqrt{n}\text{Tr}(S)$  est un majorant. Donc

$$\boxed{\alpha_n \leq \sqrt{n}\text{Tr}(S)}$$

- d) On reprend les matrices du II.1 :  $\forall A \in H_2$ ,  $f(A) \in \{-3, -1, 1, 3\}$  donc

$$\boxed{\alpha_2 = 3}$$

D'après III.2)  $\text{Tr}(S) = \sqrt{d_1} + \sqrt{d_2}$  où  $d_1$  et  $d_2$  sont les valeurs propres de  ${}^tTT = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .  $d_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$ ;  $d_2 =$

$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$  d'où  $\boxed{\text{Tr}(S) = \sqrt{5}}$

On vérifie bien que  $\boxed{3 < \sqrt{2}\sqrt{5}}$  On constate aussi que au moins pour  $n = 2m\sqrt{n}\text{Tr}(S)$  majore et n'est pas la borne supérieure.