Série numérique

K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Où sont les problèmes ?

On note (sans se poser de questions pour le momet) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N->+\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)$

Les propriétés vraies pour la somme d'un nombre fini de termes se généralisent mal à la somme d'un nombre infini:

- La somme d'une séries de fonctions toutes définies sur I n'est pas toujours définie sur I . exemple $S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} x^n \begin{cases} \text{diverge si } | \\ \to_{+\infty} \frac{1}{1-x} \text{ si} \end{cases}$
- La somme d'une série de fonctions continues n'est pas toujours continue :

  Soit $f_n(x) = (1-x)x^n$ sur $[0,1]$ on a $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \begin{cases} (1-x)\frac{1}{1-x} = 1 \text{ si } x \in [0,1[\\ \sum 0 = 0 \text{ si } x = 1 \end{cases}$
- on a donc le même problème pour "dérivable"
- La relation $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt$ **n'est pas toujours vraie**
- il peut y avoir des problèmes d'associativité et de commutativité :

  exemple1 : $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. On verra la convergence par le critère des séries alternées et que la somme est non nul.

On a $S = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 \cdots$ .Mais une mauvaise associativité serait de dire : "je groupe les termes par 3 : un positif , un négatif,un négatif ":

$S = (1 - 1/2) - 1/4 + (1/3 - 1/6) - 1/8 + \cdots + (1/(2p+1) - 1/(2(2p+1))) - 1/2(2p+2) \cdots$

$S = 1/2 - 1/4 + 1/6 - 1/8 \cdots + 1/(2(2p+1)) - 1/(2(2p+2)) = \frac{S}{2}$:absurde

exemple 2 : $\sum (-1)^n$ diverge (le terme général ne tend pas vers 0) .mais si on groupe les termes par 2 on trouve $\sum 0$ qui converge.

2. Séries et suites :

2.1. définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$.On appelle série de terme général u_n (notée $\sum u_n$) la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$, on dit que u_n est le terme d'indice n de la série (ou terme général de la série) et que S_n est la somme partielle d'indice n de la série.

Avec les notations précédentes : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $u_n = S_n - S_{n-1}$, $u_0 = S_0$.

On définit ainsi un automorphisme d'espace vectoriel entre l'ensemble des suites : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On considère aussi en pratique des séries définies à partir d'un certain rang n_0:$\sum_{k=n_0}^{k=n} u_k$. une telle série peut être considérée comme une série définie sur $\mathbb{N}$ en posant : $\forall n < n_0$, $u_n = 0$.

2.2. convergence:

Une série $\sum u_n$ est dite convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est convergente, la limite de cette suite est appelée somme de la série et notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ou $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.Par unicité de la limite on a unicité de la somme d'une série convergente.

Une série qui ne converge pas est dite divergente.

"Etudier la nature d'une série" c'est étudier si la série converge ou diverge. On saura souvent prouver qu'une série converge , étudier sa somme , sans être capable de calculer explicitement cette somme.

2.3. autre correspondance entre suite et série :

la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si $\sum(a_{n+1} - a_n)$ est convergente. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{+\infty} (a_n) - a_0$$

Rq : C'est un théorème qui sert à la fois pour l'étude des séries (exemple $\frac{1}{n(n+1)} = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ donc $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ est du type précédent avec $a_n = -\frac{1}{n}$) que pour prouver la convergence d'une suite en étudiant la série des différences.

2.4. calculs de sommes

- utilisation de somme connue:
  exemple:pour $x \neq 1 \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ donc : $\sum x^k$ converge si, et seulement si $|x| < 1$.
  et lorsque $|x| < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.
- simplification de termes:
  exemple : $\frac{1}{n(n+1)} = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{(n+1)}$. Donc $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ converge et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$
- utilisation de Taylor Lagrange:
  exemple :$\forall x \in \mathbb{R} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

3. Etude des séries convergentes :

3.1. Reste d'indice n d'une série convergente :

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Posons $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Le scalaire $R_n = S - S_n = \sum_{k \geq n+1} u_k$ est appelé reste d'indice n de la série convergente $\sum u_n$.(vous pouvez aussi rencontrer l'expression "série reste")

La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

plus généralement si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de limite $+\infty$ telles que $\forall n\ a_n \leq b_n$, la suite $W_n = \sum_{k=a_n}^{b_n} u_k$ tend vers 0 .

3.2. Théorème (Condition nécessaire de convergence) :

$\sum u_n$ est convergente $\Longrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 .

La réciproque est fausse :exemple $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$

conséquence : si la suite ne tend pas vers 0 , la série diverge (on dira que la série diverge grossièrement).

3.3. structure:

- On définit la combinaison linéaire de deux séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ toute série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$.
- Théorème :l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application $(u_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est linéaire
- conséquence : la somme d'une série convergente et d'une série divergente diverge.
- par contre la somme de deux séries divergentes est une forme indéterminée .
- Danger ne dites jamais trop vite : $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ quand $\sum (u_n + v_n)$ converge . Il se peut que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent tous les deux.

3.4. autres calculs:

Pour tout autre calcul sur les séries il faut revenir à l'étude des sommes partielles .

4. Séries de nombres réels positifs :

remarque1:pour étudier une séries de nombres réels négatifs, il suffit d'appliquer cette partie à son opposée.

remarque2 : tous les résultats restent vrais si la série est à termes positifs à partir d'un certain rang.

4.1. Théorème de base :

Pour qu'une série de nombres réels positifs soit convergente il faut et il suffit que la suite de ses sommes partielles soit majorée.

Dans le cas où la suite des sommes partielles n'est pas majorée elle tend vers $+\infty$.

Dans le cas où la série converge sa somme est la borne supérieure de ses sommes partielles .

4.2. Théorèmes de comparaison :

4.2.1. séries majorantes

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries de réels telles qu'à partir d'un certain rang n_0, $0 \leq u_n \leq v_n$. alors si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge, et $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} v_n$.

Par contraposition si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Danger : On compare les termes et non les sommes partielles

4.2.2. domination:

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

En pratique n'oubliez pas qu'un o ou un $\sim$ implique un O .

en particulier : si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ alors les deux séries sont de même nature .

Danger : si le signe varie c'est faux : $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

4.2.3. Séries de Riemann :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque : on démontrera dans le cours de l'année $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

4.2.4. Comparaison à une série de Riemann

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ soit bornée et si la série est à termes positifs, alors $\sum u_n$ est convergente.

  En pratique on montre que $(n^\alpha u_n)$ converge en commençant par essayer $\alpha = 2$.

- S'il existe $\beta < 1$ tel que la suite $(n^\beta u_n)$ tende vers une limite (finie ou infinie) **non nulle** et si la série est à termes positifs, alors $\sum u_n$ est divergente.

4.2.5. Règle de D'Alembert (comparaison à une série géométrique) :

Supposons que à partir d'un certain rang n_0 la série soit à termes strictement positifs et que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ tende vers $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors :

- Si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
- Si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge
- Si $l = 1$, on ne peut rien dire de général.

4.3. Comparaison aux intégrales

On supposera pour la suite que la fonction décroît. Les encadrements s'adaptent si la fonction croît. (le cas croissant est symétrique en changeant le sens des inégalités)

4.3.1. Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone sur un segment

f est continue par morceaux positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\ dx \leq f(n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \int_n^{n+1} f(x)\ dx \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\ dx$$

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(x)dx$$

4.3.2. conséquence:

Soit f une fonction continue par morceaux positive décroissante sur $[0, +\infty[$ .Alors la série de terme général $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$ est toujours convergente .

4.3.3. utilisation de l'encadrement pour prouver une convergence

Avec les hypothèses précédentes la suite $\left(I_n = \int_0^n f(t)dt\right)$et la série $\sum f(n)$ sont de même nature.

exemple : preuve de la convergence ou de la divergence des séries de Riemann.

exemple : série de Bertrand : $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ converge ssi $\beta > 1$

4.3.4. Utilisation de l'encadrement pour étudier le reste d'une série convergente.

Si $\sum f(n)$ converge alors la suite (I_n) converge , notons I sa limite .On a alors $I - I_{n+1} \leq R_n \leq I - I_n$, ce qui suffit souvent à donner un équivalent de R_n.

4.3.5. Utilisation de l'encadrement pour étudier la suite (S_n) pour une série divergente

De l'encadrement plus haut on déduit $I_n + f(n+1) \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + I_n$.

Si la série diverge I_n tend vers $+\infty$. L'encadrement précédent donne alors souvent un équivalent de S_n .

Exemple $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$

5. Séries à termes réels quelconques :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels (positifs ou non)

5.1. partie positive et négative:

5.1.1. définition :

Soit x un réel . On pose $x^+ = \sup(x, 0)$ et $x^- = \sup(-x, 0)$

5.1.2. propriétés:

$$x^+ \geq 0, x^- \geq 0, x = x^+ - x^-, |x| = x^+ + x^- \ , x^+ \leq |x| \ , x^- \leq |x|$$

5.2. Séries absolument convergentes :

5.2.1. Définition :

$\sum u_n$ est dite absolument convergente si et seulement si $\sum |u_n|$ est convergente.

5.2.2. Proposition :

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente les séries $\sum u_n^+$, $\sum u_n^-$ et $\sum u_n$ convergent et de plus $|\sum_{n=0}^\infty u_n| \leq \sum_{k=0}^\infty |u_n|$.

5.2.3. danger:

La série $\sum u_n$ peut converger sans converger absolument (exemple la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$).

5.2.4. semiconvergence

tout série convergente et non absolument convergente est dite semi-convergente..

5.3. Séries alternées :

Ce sont les séries $\sum u_n$ à termes réels telles que :
$(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n u_{n+1} \leq 0$

Critère spécial des séries alternées (c'est une condition suffisante de convergence d'une série alternée):
Soit $\sum u_n$ une série alternée. Si $(|u_n|)$ est décroissante et tend vers 0 alors la série $\sum u_n$ est convergente et :

1. La somme S est du signe au sens large de u_0 et $|S| \leq |u_0|$.
2. La somme est comprise entre deux sommes partielles consécutives quelconques.
3. Pour tout entier naturel n, $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.
4. Les inégalités sont strictes si $\forall n \ u_n \neq 0$

Exemple:$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergent

5.4. pratique

Dans l'étude d'une série on pourra avoir la démarche suivante:

- Commencer par regarder si son terme général tend vers 0.
- Regarder si la série est à termes positifs . On applique alors les théorèmes de comparaison démontrés dans le cas des séries à termes positifs.
- Si non étudier la converge absolue.
- Ne pas oublier de regarder si on a les hypothèses du critère spécial des série alternée.
- A défaut on utilise un développement asymptotique du terme général ou un groupement de termes .
  exemple $\sum \ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$

6. séries à termes complexes .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes

6.1. première propriété:

La série $\sum u_n$ converge ssi les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum Im(u_n)$ sont convergentes. Dans le cas de convergence on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} Re(u_n) + \; i\sum_{n=0}^{\infty} Im(u_n).$$

6.2. vocabulaire

La série $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si la série $\sum |u_n|$ converge.

le module et l'argument d'une somme ne sont pas des formules simples; Module et argument de S_n ne sont donc pas de bons outils de calcul d'une série complexe.

6.3. théorème

toute série absolument convergente , converge et de plus $|\sum_{n=0}^{\infty} u_n| \le \sum_{k=0}^{\infty} |u_n|$.

6.4. série géométrique

Pour $z\in\mathbb{C}$, la série $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z|<1$. et on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

remarque : pour voir si une série $\sum u_n$ est géométrique , il suffit de vérifier $\frac{u_{n+1}}{u_n} = z$ constante. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{u_0}{1-z}$$

6.5. exponentielle complexe:

pour tout complexe $z=a+ib$ on pose $\exp(z)=e^z=e^{a+ib}=e^a\left(\cos(b)+i\sin(b)\right)$

Théorème : la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout complexe z .

On admet que sa somme est $\exp(z)$.

6.6. Produit de Cauchy :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de complexes (ou de réels)

définition : 0n appelle produit de Cauchy de la série $\sum u_n$ par la série $\sum v_n$, la série $\sum w_n$ telle que $w_n \;=\; \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{n-k}$.

Proposition (admise): Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes . Alors la série $\sum w_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{n=0}^{\infty} v_n$

7. Formule de Stirling (admise)

Proposition : On a $n! \sim (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$.