Espaces vectoriels normés

1. VOCABULAIRE

Dans tout ce chapitre le corps $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'objectif est de généraliser la notion de valeur absolue dans le cas d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non réduit à $\{\vec{0}\}$.Nous pourrons ainsi généraliser la notion de limite de suite et de continuité des fonctions.

1.1. Norme :

On appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}^+$ qui a les propriétés suivantes :

- $N(x) = 0 \iff x = 0$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- $\forall x \in E, \forall y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$. (inégalité triangulaire)

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé .

1.2. pratique:

Pour montrer qu'une application N est une norme on revient à la définition sans oublier de vérifier $N(E) \subset \mathbb{R}^+$ .le plus délicat est en général :$N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
La norme de x se note en général $N(x)$ ou $\|x\|$

1.3. norme euclidienne:

Si E est un espace vectoriel muni du produit scalaire $\langle , \rangle$ la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$
Une norme euclidienne se reconnaît en général à la présence d'une $\sqrt{\ }$
remarque1 : on généralisera la notion de produit scalaire et de norme euclidienne à un espace vectoriel complexe (forme sesquilinéaire définie positive à symétrie hermicienne)
remarque2 : toute norme n'est pas une norme euclidienne

1.4. Exemples :

1.4.1. Dans E de dimension finie $n > 0$

- Si on se donne une base $(e_1, ..., e_n)$, on peut définir pour , $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ les normes suivantes :
- $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$ (norme euclidienne pour un E.V. réel , admis pour un E.V. complexe)
- $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} (|x_k|)$

attention:Ces normes dépendent de la base choisie.

1.4.2. Dans $M_n(\mathbb{K})$

on peut définir les normes usuelles:

- $||A||_1 = \sum_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n} |a_{i,j}|$
- $\|A\|_2 = \sqrt{tr({}^t\overline{A}A)} = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n} |a_{i,j}|^2}$
- $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n} |a_{i,j}|$
- Il existe des normes telles que $\|A.B\| \leq \|A\| . \|B\|$. Une telle norme est dite "norme d'algèbre"

1.4.3. dans $\mathcal{L}(E)$

Si E est un espace vectoriel de dimension finie on peut définir sur $\mathcal{L}(E)$ les normes déduites des normes précédentes sur $M_n(\mathbb{K})$ .En particulier

- Il existe une norme telle que $\|f \circ g\| \leq \|f\| \, \|g\|$

1.4.4. Pour une fonction continue à valeur réelles ou complexes sur un intervalle I:

on peut définir les normes :

- $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$
- $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f|^2}$ sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ (norme euclidienne pour un E.V. réel , admis pour un E.V. complexe)
- $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t \in I} |f(t)|$ sur l'espace vectoriel des fonctions bornées sur I .

1.5. Propriétés :

- $\forall x \in E,\ \|-x\| = \|x\|$.
- $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ |\ \|x\| - \|y\|\ | \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

1.6. Boules:

1.6.1. définitions:

On appelle boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\mathcal{B}(a,r) = \{x \in E \mid \ \|x - a\| < r\ \}$.
On appelle boule fermée de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\mathcal{B}'(a,r) = \{x \in E \mid \ \|x - a\| \leq r\ \}$.
On convient que le singleton $\{x\}$ est la boule fermée de centre x et de rayon nul.

1.7. Partie Bornée:

Dans un espace vectoriel normé E on appelle partie bornée toute partie de E qui est contenue dans une boule. A est une partie bornée de E si, et seulement si $(\exists \alpha > 0)\ (\forall x \in A)\ \|x\| \leq \alpha$.

1.8. Distance associée à une norme :

On appelle distance associée à la norme $\|\ \ \|$ l'application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = \|x - y\|$$

d vérifie les propriétés suivantes (à retrouver rapidement sui besoin est) :

- $\forall\, (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- $\forall\, (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = d(y, x)$.
- $\forall\, (x, y, z) \in E^3$, $d(x, y) \leq\ d(x, z)\ +\ d(z, y)$.
- $\forall\, (x, y, z) \in E^3$, $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.
- $\forall\, (x, y) \in E^2\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

1.9. Distance à un sous ensemble:

Etant donnée une partie non vide A d'un espace vectoriel normé E et un vecteur x_0 de E, on appelle distance de x_0 à A le nombre réel $\inf\{\ \|a - x_0\|\ \ \mid a \in A\ \}$, on le note $d(x_0,\ A)$.
Remarque: il se peut qu'il n'existe pas d'élément a de A tel que $d(x_0, a)\ = d(x_0, A)$ (il suffit de considérer $A = [0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 = 2$).

2. SUITES CONVERGENTES

On se place dans un espace vectoriel normé E . La norme est notée $\|\ \ \|$

2.1. définitions:

On appelle suite de E toute application de $\mathbb{N}$ dans E (ou d'un sous ensemble D de $\mathbb{N}$ tel qu'à partir d'un certain rang $n \in D$)
On appelle suite bornée de E toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M \ .$$

On appelle suite convergente de E toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle qu'il existe $a \in E$ vérifiant :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow \ ||a - u_n|| \leq \epsilon \ .$$

a est alors unique et appelé limite de la suite convergente (u_n). On écrit $\lim\limits_{n->\infty}(u_n) \ = a$. Ainsi (u_n) converge vers $a \in E$ si, et seulement si la suite de réels $(\|u_n - a\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Une suite qui ne converge pas diverge .

2.2. Propriétés :

- Toute suite convergente est bornée.
- L'ensemble des suites convergentes de E est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.
- l'application qui à une suite convergente de E associe sa limite est une application linéaire.
- Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de scalaires de $\mathbb{K}$ convergente vers l et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E convergente vers a alors $(\lambda_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la.
- Si (u_n) converge vers a alors $(||u_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $||a||$.
- Toute suite extraite d'une suite convergente, converge vers la même limite.

2.3. Normes équivalentes :

2.3.1. Définition:

Soient N et N' deux normes sur E. On dit que N est équivalente à N' lorsqu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha N' \leq N \leq \beta N'$:

$$\forall x \in E \ , \ \alpha N'(x) \leq N(x) \leq \beta N'(x)$$

2.3.2. propriétés:

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si les normes N et N' sont équivalentes , la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a pour N si et seulement si elle converge vers a pour N'.
Pour deux normes équivalentes N et N' les notions de convergence et de limite pour les suites sont donc les mêmes :
On peut remplacer une norme par une norme équivalente dans une étude.

2.3.3. Exemples et contre-exemples :

1) Les normes usuelles dans $\mathbb{K}^p$ sont équivalentes.
2) Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. On a $\forall f \in E$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ mais les deux normes ne sont pas équivalentes.

3. SUITES EN DIMENSION FINIE

E est désormais un espace vectoriel normé de dimension finie $n > 0$.
Les résultats s'appliquent en particulier pour :

- les suites de réels et de complexes
- les suites de $\mathbb{K}^n$
- les suites de $\mathbb{K}_n[X]$
- les suites de$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- les suites de $\mathcal{L}(E)$ si E est de dimension finie.

3.1. Equivalence des normes (admis)

En dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

3.2. conséquences en dimension finie:

- Une suite bornée pour une norme l'est pour toute autre norme.
- Pour prouver qu'une suite est convergente on choisit la norme la mieux adaptée.
- Pour prouver qu'une suite est convergente il suffit de prouver que dans une base $e = (e_1, ..., e_p)$, les suites coordonnées sont convergentes. La limite est alors le vecteur qui a pour coordonnées dans cette base les limites des suites coordonnées correspondantes.

3.3. application linéaire (bilinéaire):

Soit ϕ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finie . Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l alors la suite $(\phi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\phi(l)$.
Soit B est une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F espaces vectoriels de dimension finie . Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l et l' alors la suite $(B(u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $B(l, l')$.
Le deuxième théorème s'applique principalement dans le cas des produits usuels (produit de matrices , produit scalaire , produit vectoriel) .

4. APPLICATION LIPSCHITZIENNE :

définition (dimension finie ou non):
Une application f d'une partie A d'un espace vectoriel normé E de dimension finie dans un espace vectoriel normé F de dimension finie est dite lipschitzienne lorsqu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in A, \forall y \in A \ , \ ||f(x) - f(y)||_F \leq k||x - y||_E$$

(on dit qu'elle k-lipschitzienne).

structure:L'ensemble des fonctions lipschitziennes de X dans F est un espace vectoriel.
Danger:Le produit de deux fonctions lipschitziennes ne l'est pas toujours.

5. LIMITE D'UNE APPLICATION

E et F sont toujours des espaces vectoriels normés de dimension finie.

5.1. Point adhérent :

- définition:Un point a de E est adhérent à un sous ensemble A si et seulement si il existe une suite de points de A de limite a.
- critère a est adhérent à A si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0 \ , \ B'(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

5.2. Définition:

Soit f une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé E de dimension finie à valeurs dans un espace vectoriel normé F. On suppose que $a \in E$ est adhérent à A.
S'il existe $b \in F$ tel que :

$$\forall \epsilon > 0 \ , \exists \eta > 0, \ (x \in A \text{ et } ||x - a||_E \leq \eta) \Longrightarrow \ ||f(x) - b||_F \leq \epsilon \ )$$

alors b est unique et on dit que f admet b pour limite en a, on écrit $\lim\limits_{x->a} f(x) = b$, on dit aussi " $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a ".

5.3. Critère séquentiel de la limite :

- Théorème:f admet b pour limite en a si, et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A tendant vers a, la suite $(f(a_n))$ tend vers b.
- Pour montrer que f ne tend pas vers b il suffit donc de trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A tendant vers a, la suite $(f(a_n))$ ne tendant pas vers b.
- Pour montrer que f n'a pas de limite il suffit au choix:

- de trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A tendant vers a, la suite $(f(a_n))$ étant divergente.
- de trouver deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A tendant vers a, les suites $(f(a_n))$ et $(f(\alpha_n))$ ayant des limites différentes ..

5.4. Propriétés:

- indépendance de la norme.
- utilisation des coordonnées:

  Supposons que F soit de dimension finie et que $(b_1, ..., b_q)$ soit une base de F, si $f(x) = \sum_{k=1}^{k=p} f_k(x)b_k$, chaque f_k est une application de A dans $\mathbb{K}$. Pour que f admette $b = \sum_{k=1}^{k=p} l_k b_k$ pour limite en a il faut et il suffit que chaque f_k admette l_k pour limite en a. Les f_k sont appelées les fonctions coordonnées de f relativement à la base $(b_1, ..., b_q)$ de F.
- structure:

  L'ensemble des fonctions de A dans F admettent une limite en a est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et la limite est linéaire .
- Composition :

  Soit f une application d'une partie A de E à valeurs dans F et g une application d'une partie B de F à valeurs dans un espace vectoriel normé G, telle que $f(A) \subset B$. Supposons que $a \in E$ soit adhérent à A et que f admette b pour limite en a. Alors b est adhérent à B et si g admet une limite $c \in G$ en b, $g \circ f$ admet c pour limite en a.

5.5. Extension dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$:

Soit f une application d'un intervalle du type $[x_0, = \infty[$ (ou $]x_0, +\infty[$) à valeurs dans F. S'il existe $b \in F$ tel que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > x_0, x \geq A \Rightarrow \ ||f(x) - b||_F \leq \epsilon \ )$$

alors b est unique et on dit que f admet b pour limite en $+\infty$, on écrit $\lim_{x->+\infty} f(x) = b$, on dit aussi " $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers $+\infty$ ".
On a une définition analogue lorsque f est définie sur un intervalle du type $]-\infty, x_0)$ et $a = -\infty$.

5.6. Extension dans le cas où $F = \mathbb{R}$ et $b = \pm\infty$:

Soit f une application d'une partie A de E à valeurs dans $\mathbb{R}$, a adhérent à A , on dit que f tend vers $+\infty$ en a lorsque :

$$\forall X \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, (\forall x \in A \text{ et } ||x - a||_E \leq \eta) \implies f(x) \geq X$$

on dit que f tend vers $-\infty$ en a lorsque :

$$\forall X \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, (\forall x \in A \text{ et } ||x - a||_E \leq \eta) \implies f(x) \leq X$$

Dans tous les cas le critère séquentiel s'adapte et reste valable.

6. CONTINUITE :

f désigne une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé de dimension finie E à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie F.

6.1. Définitions:

f est continue en $a \in A$ si, et seulement si f admet pour limite $f(a)$ en a.
On dit que f est continue sur A lorsqu'elle est continue en chaque point de A. On note $C^0(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues sur A à valeurs dans F.

6.2. Caractérisation séquentielle de la continuité :

f est continue en $a \in A$ si, et seulement si pour toute suite de points (x_n) de A convergeant vers a, $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

6.3. Propriétés:

- pour que f soit continue en $a \in A$ il faut et il suffit que ses fonctions coordonnées par rapport à une base de F soient continues en a.
- Par contre la continuité des fonctions partielles ne suffit pas à prouver la continuité de f .
- L'ensemble $C^0(A, F)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel .
- L'ensemble $C^0(A, \mathbb{K})$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.
- le produit de deux fonctions continues sur un même domaine y est continue.
- composition : Si $f \in C^0(A, B)$ et si $g \in C^0(B, F)$ alors $g \circ f \in C^0(A, F)$.

6.4. Exemples à connaître:

- Dans le cas général :
  - toute fonction lipschitzienne est continue sur son domaine de définition
  - l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\|x\|$ est continue sur E .
  - L'application $(\lambda,\ x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E est continue.
  - toute application linéaire (bilinéaire) est continue .
  - Tous les produits usuels en dimension finie (produit scalaire , produit vectoriel , produit matriciel , composition d'endomorphismes) ,
- dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
  - La fonction déterminant est continue
  - La transposition est continue
- dans $\mathbb{C}$
  - les fonctions Re, Im, module , conjugué sont continue sur $\mathbb{C}$
  - les fonctions polynômes sont continues
  - les fonctions fractions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition
  - $z- > \exp(z)$ est continue

7. RELATIONS DE COMPARAISON

7.1. Cas des suites:

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs d'un espace vectoriel normé E est dominée par une suite de réels positifs (α_n) lorsque $||u_n|| = O(\alpha_n)$:
On dit qu'une suite (u_n) de vecteurs d'un espace vectoriel normé E est négligeable devant une suite de réels positifs (α_n) lorsque $||u_n|| = o(\alpha_n)$

7.2. cas des fonctions

Soient f une fonction définie sur A (sous ensemble d'un espace vectoriel de dimension finie) à valeurs dans F et φ une fonction définie sur A à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et a un point adhérent à A .
On dit que f est négligeable devant φ au voisinage de a ($f = o(\varphi)$ en a) si et seulement si $\|f\| = o\,(\varphi)$:

$$\exists \eta > 0, \exists \varepsilon \text{ fonction de } A \cap B'(a, \eta) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \ , \left\{ \begin{array}{c} x \in A \cap B'(a, \eta)\ ,\ f(x) = \varepsilon(x)\phi(x) \\ \lim\limits_{a} (\varepsilon) = 0 \end{array} \right.$$

f est dominée par φ au voisinage de a ($f = O(\varphi)$ en a) si et seulement si $\|f\| = O\,(\varphi)$:

$$\exists \eta > 0, \exists \varepsilon \text{ fonction de } A \cap B'(a, \eta) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \ , \left\{ \begin{array}{c} x \in A \cap B'(a, \eta)\ ,\ f(x) = \varepsilon(x)\phi(x) \\ \varepsilon \text{ bornée sur } A \cap B'(a, \eta) \end{array} \right.$$

8. TOPOLOGIE

8.1. Ouvert

8.1.1. définition

Un ensemble non vide Ω est un ouvert si et seulement si tout point x de Ω est centre d'une boule ouverte de centre x :

$$\begin{aligned} \forall x &\in \Omega \ , \exists r > 0 \ , \mathcal{B}(x,r) \subset \Omega \\ \forall x &\in \Omega \ , \exists r > 0 \ , \ \|z-x\| < r \ \Rightarrow z \in \Omega \end{aligned}$$

On convient que l'ensemble vide est aussi un ouvert.

8.1.2. exemples:

- E et $\emptyset$ sont des ouverts
- pour tout x de E et tout réel strictement positif r la boule ouverte $\mathcal{B}(x,r) = \{z, \|x-z\| < r\}$ est un ouvert de E .
- pour tout x de E et tout réel strictement positif r , $\{z, \|x-z\| > r\}$ est un ouvert de E .

8.1.3. propriétés:

- La notion d'ouvert est indépendante de la norme choisie
- L'union d'ouverts de E est un ouvert de E.
- L'intersection d'un nombre fini d'ouverts de E est un ouvert de E.

8.1.4. méthode pratique

si f est continue de E dans F alors l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E .

- En particulier si f est à valeur réelle :$\{x \in E, f(x) < a\}$ et $\{x \in E, f(x) > a\}$ sont des ouverts de E

les ouverts usuels sont de ce type , ou intersection d'ouverts de ce type.

8.2. Fermé:

8.2.1. définition:

Un ensemble F est un fermé si et seulement si le complémentaire de F est un ouvert.

8.2.2. exemples:

- E et $\emptyset$ sont des fermés
- boule fermée : pour tout x de E et tout réel strictement positif r $\mathcal{B}'(x,r) = \{z, \|x-z\| \leq r\}$ est un fermé de E .
- pour tout x de E et tout réel strictement positif r , $\{z, \|x-z\| \geq r\}$ est un fermé de E
- tout singleton est un fermé

8.2.3. propriétés:

- La notion de fermé est indépendante de la norme choisie
- La réunion d'un nombre fini de fermés de E est un fermé de E.
- tout sous ensemble fini est un fermé
- L'intersection de fermés de E est un fermé de E.

8.2.4. méthode pratique:

- si f est continue de E dans F alors l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E.

En particulier si f est à valeur réelle $\{x \in E, f(x) \leq a\}$, $\{x \in E, f(x) \geq a\}$ et $\{x \in E, f(x) = a\}$ sont des fermés de E .
les fermés usuels sont de ce type , ou intersection de fermés de ce type.

8.3. compact:

8.3.1. définition:

Un compact de E est soit l'ensemble vide , soit un fermé borné.
En particulier toute boule fermé est compact.

8.3.2. compact de $\mathbb{R}$:

Si K est un sous ensemble compact non vide de $\mathbb{R}$ alors K admet un plus petit élément et un plus grand élément.

8.3.3. propriétés:

- La notion de compact est indépendante de la norme choisie.
- La réunion d'un nombre fini de compacts de E est un compact de E.
- L'intersection de compacts de E est un compact de E.
- (admis) si f est continue sur un compact K de E alors $f(K)$ est un compact de F.
- Si f est une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$ l'image de tout compact non vide admet un plus grand et un plus petit élément.