

REDUCTION

On se donne un endomorphisme. Le but du chapitre est de chercher une base dans la quelle la matrice de l'endomorphisme sera simple (diagonale ou triangulaire)

On se donne une matrice. Le but du chapitre est de chercher une matrice simple (diagonale ou triangulaire) semblable à la matrice donnée .

On verra à la fin des exemples d'application.

1. ELEMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME :

E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie ou non, et f est un endomorphisme de E

1.1. vocabulaire:

1.1.1. Valeur propre :

On appelle valeur propre de l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tout scalaire λ de \mathbb{K} tel qu'il existe un vecteur **non nul** de E vérifiant $f(x) = \lambda x$.

1.1.2. Vecteur propre :

On appelle vecteur propre de l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tout vecteur **non nul** de E pour lequel il existe un scalaire λ de \mathbb{K} tel que $f(x) = \lambda x$, λ est alors déterminé de manière unique et appelé valeur propre associée au vecteur propre x .

1.1.3. Élément propre :

On appelle élément propre de l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tout couple $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times (E \setminus \{\vec{0}\})$ tel que $f(x) = \lambda x$.
Remarques :

- Si (λ, x) est élément propre de $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\forall \mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, (\lambda, \mu x)$ est élément propre de f .
- Si (λ, x) est élément propre de $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\forall p \in \mathbb{N}^*, (\lambda^p, x)$ est élément propre de f^p .

1.1.4. Spectre de f :

C'est l'ensemble des valeurs propres de f . On le note $sp(f)$.

1.1.5. Sous-espace propre :

propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. λ est une valeur propre de f si, et seulement si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\ker(f - \lambda I_E) \neq \{0\}$. Si λ est une valeur propre de f , les vecteurs propres de f relatifs à λ sont les vecteurs non nuls de $\ker(f - \lambda I_E)$.

définition : $\ker(f - \lambda I_E)$ est appelé le sous espace propre relatif à la valeur propre λ de f , on le notera $E_\lambda(f)$.

1.2. exemples:

- la seule valeur propre d'une homothétie de rapport λ est λ et $E_\lambda(f) = E$
- les valeurs propres d'un projecteur (distinct de 0 et Id) sont 0 et 1 . $E_0(p) = \ker(p)$, $E_1(p) = \text{Im}(p)$
- les valeurs propres d'une symétrie (distincte de $-Id$ et Id) sont -1 et 1
- les valeurs propres d'une affinité de rapport a (distinct d'une homothétie) sont a et 1
- La seule valeur propre d'un endomorphisme nilpotent ($\exists k \in \mathbb{N}^*, f^k = 0$) est 0 .

1.3. Propriétés des éléments propres :

- f n'est pas injective si et seulement si $0 \in sp(f)$ et alors $E_0(f) = \ker(f)$
- Pour $\lambda \neq 0$ le sous espace propre $E_\lambda(f)$ est un sous espace vectoriel de $\text{Im}(f)$
- tout sous-espace propre pour f est stable par f et l'endomorphisme induit par f est une homothétie.
- Si f et g commutent , tout sous espace propre de l'un est stable par l'autre
- Une famille de vecteurs propres d'un endomorphisme f associé à des valeurs propres distinctes est libre.

- La somme d'un nombre fini de sous espaces propres est directe
- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et (λ, x) est un élément propre de f alors $(P(\lambda), x)$ est un élément propre de $P(f)$.
- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $P(f) = 0$ et si $\lambda \in sp(f)$, alors $P(\lambda) = 0$.

On dit que P est un polynôme annulateur de f . Toute valeur propre est racine du polynôme annulateur. La réciproque est fausse.

1.4. Recherche des éléments propres en dimension finie:

- On peut rechercher les valeurs propres en disant que λ est valeur propre si et seulement si $\det(f - \lambda Id) = 0$ puis rechercher les vecteurs propres par résolution de systèmes linéaires.
- On peut chercher un polynôme annulateur P puis chercher les racines de P . L'ensemble des racines contient le spectre. Puis on recherche les vecteurs propres par résolution de systèmes linéaires.
Si le système donne la seule solution nulle la racine n'est pas valeur propre, sinon elle l'est.
- E_0 est le noyau de f . Les autres sous espaces propres se trouvent en étudiant l'endomorphisme induit sur l'image (utile si le rang est petit)

2. ELEMENTS PROPRES D'UNE MATRICE CARREE :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

2.1. Définition :

Les éléments propres (resp. le spectre) de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont définis à partir des éléments propres (resp. le spectre) de l'endomorphisme de \mathbb{K}^n associé à A :

$$(\lambda, X) \text{ est un élément propre de } A \text{ si et seulement si } (X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), X \neq (0), \lambda \in \mathbb{K}, AX = \lambda X)$$

On a en particulier :

$$\lambda \in sp(A) \iff \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } \det(A - \lambda I_n) = 0$$

Les propriétés vues pour les endomorphismes se traduisent sans problème.

2.2. Importance du corps de base :

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si on note $sp_{\mathbb{R}}(A)$ le spectre de A considérée comme réelle et $sp_{\mathbb{C}}(A)$ le spectre de A considérée comme complexe on a $sp_{\mathbb{R}}(A) \subset sp_{\mathbb{C}}(A)$. L'exemple d'une rotation d'angle $\pi/2$ montre qu'il n'y a pas nécessairement égalité :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset, sp_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}.$$

2.3. Invariant de similitude :

deux matrices semblables ont même spectre.

3. POLYNOME CARACTERISTIQUE:

3.1. définition:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et supposons que $\dim(E) = n$. Nous avons que

$$\lambda \in sp(f) \iff \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } \det(f - \lambda Id) = 0$$

Le polynôme P_f tel que $P_f(\lambda) = \det(f - \lambda I_n)$ est appelé polynôme caractéristique de f .

Remarque le polynôme caractéristique est aussi parfois défini comme : $\det(\lambda I_n - f)$

3.2. calcul dans une base:

Si $B = (b_1, \dots, b_n)$ est une base de E on a

$$\text{Mat}_B(f) = (m_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2}$$

et :

$$P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} m_{1,1} - \lambda & m_{1,2} & \dots & \dots & \dots \\ m_{2,1} & m_{2,2} - \lambda & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{n-1,1} & \dots & \dots & m_{n-1,n-1} - \lambda & m_{n-1,n} \\ m_{n,1} & \dots & \dots & \dots & m_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}.$$

$P_f(\lambda)$ est un polynôme en λ de degré n dont le coefficient dominant est $(-1)^n$, le coefficient de λ^{n-1} est $(-1)^{n-1} \text{tr}(f)$ et le coefficient constant $\det(f)$.

$$P_f(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(f) \lambda^{n-1} + \dots + \det(f).$$

3.3. propriétés:

- $\text{sp}(f) = \{\lambda \in \mathbb{K}, P_f(\lambda) = 0\}$.
- Dans le cas où $P_f(X)$ est scindé sur \mathbb{K} la trace de f est la somme des valeurs propres de f , chacune répétée à son ordre de multiplicité, le déterminant de f est égal au produit des valeurs propres de f , chacune répétée à son ordre de multiplicité.
- Dans les complexes (ou dans les réels en dimension impaire) tout polynôme admet une racine, donc tout endomorphisme admet un élément propre.
- Si F est un sous espace vectoriel de E stable par f alors si f_1 est l'endomorphisme induit par f sur F P_{f_1} divise P_f .
- Si λ est une racine de $P_f(\lambda)$ de multiplicité m alors $\dim(E_\lambda(f)) \leq m$. En particulier si λ est une racine simple alors le sous espace propre est une droite.

3.4. cas d'une matrice:

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = \det(A - XI_n)$. on peut alors traduire les propriétés liées au polynôme caractéristique d'un endomorphisme. deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

4. Endomorphisme (ou matrice) diagonalisable:

Dans ce paragraphe, f désignera un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$.

4.1. Définition :

f est diagonalisable si, et seulement si E est somme directe des sous espaces propres de f : $E = \bigoplus E_{\lambda_i}(f)$

propriétés équivalentes:

- f est diagonalisable
- il existe une base de E formée de vecteurs propres pour f .
- il existe une base telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale.
- $\sum \dim(E_{\lambda_i}(f)) = \dim(E)$.

4.2. Propriétés :

- Si $P_f(X)$ est scindé sur \mathbb{K} à racines simples, f est diagonalisable et les sous espaces propres sont des droites.
- Si $P_f(X)$ est scindé sur \mathbb{K} et si pour toute racine λ la dimension du sous espace propre est égal à la multiplicité alors f est diagonalisable.
- Si f est diagonalisable et si F est un sous espace vectoriel de E stable par f , alors f_F est diagonalisable.
- f est diagonalisable si, et seulement si il existe un polynôme annulateur Q non nul, scindé, à racines simples. (admis)

- si f est diagonalisable est si $Sp(f) = \{\lambda_i\}_{i=1}^p \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur.
- Si f est diagonalisable et si F est un sous espace vectoriel de E stable par f , alors f_F est diagonalisable.
- un endomorphisme diagonalisable ayant une unique valeur propre est une homothétie.
- Si E est somme directe de sous espace stables tels que l'endomorphisme induit par f sur chaque sous espace soit une homothétie, alors f est diagonalisable.

4.3. matrice diagonalisable:

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si, et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale. Les termes de la diagonale sont alors les valeurs propres de A chacune répétée à son ordre de multiplicité. Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et il existe une base orthonormée de vecteurs propres (admis provisoirement) .

5. Endomorphisme (ou matrice) trigonalisable :

Dans ce paragraphe, f désignera un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$.

5.1. définition

f est trigonalisable si, et seulement si il existe une base telle que la matrice de f dans cette base soit triangulaire supérieure.

remarque1 : en changeant l'ordre des vecteurs de base il est équivalent de prendre une matrice triangulaire inférieure.

remarque2 : tout endomorphisme diagonalisable est trigonalisable.

5.2. matrice trigonalisable:

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si, et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.. Les termes de la diagonale sont alors les valeurs propres de A chacune répétée à son ordre de multiplicité.

5.3. cas du corps des complexes:

Tout endomorphisme d'un \mathbb{C} espace vectoriel est trigonalisable.

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable

5.4. cs du corps des réels (admis)

Tout endomorphisme f d'un \mathbb{R} espace vectoriel ayant un polynôme caractéristique scindé est trigonalisable.

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant un polynôme caractéristique scindé est trigonalisable.

5.5. recherche pratique en dimension 3

Soit f un endomorphisme de \mathbb{K}^3 ayant un polynôme caractéristique scindé. On cherche une base B dans laquelle la matrice de f soit diagonale (si possible) ou sinon triangulaire supérieure du type $T = D + N$, D diagonale, N nilpotente, avec $DN = ND$ (la forme utile pour les calculs)

On calcule le polynôme caractéristique, ses racines et leurs multiplicité puis les sous espaces propres. On a alors les cas suivants :

- trois valeurs propres distincts et donc trois sous espaces propres de dimension 1 : On a une base de vecteurs propres . Diagonalisable
- une valeur propre simple λ et une double μ . On a alors $\dim(E_\lambda(f)) = 1$
 - Si $\dim(E_\mu(f)) = 2$ on a une base de vecteurs propres : diagonalisable
 - Si $\dim(E_\mu(f)) = 1$ il existe une base telle que $Mat_{(I,J,K)}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec I générateur de $E_\lambda(f)$, J générateur de $E_\mu(f)$ et K solution de $f(K) = J + \mu K$

- une valeur propre triple λ

remarque : comme 0 est la seule valeur propre complexe de $f - \lambda Id$ on a toujours $f - \lambda Id$ nilpotente. On se ramène à l'étude de $f - \lambda Id$:

- Si $\dim(E_\lambda(f)) = 3$ on a une base de vecteurs propres ; Diagonalisable (et f est une homothétie)
- Si $\dim(E_\lambda(f)) = 2$ il existe une base telle que telle que $Mat_{(I,J,K)}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. On prend $J \in \text{Im}(f - \lambda Id)$, K tel que $f(K) - \lambda K = J$ et I pour que (I, J) engendre $E_\lambda(f)$
- Si $\dim(E_\lambda(f)) = 1$ il existe une base telle que telle que $Mat_{(I,J,K)}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. On prend K tel que $(f - \lambda Id)^2(K) \neq 0, J = (f - \lambda Id)(K)$ et $I = (f - \lambda Id)(J)$

6. APPLICATIONS:

On se place en dimension 3 dans ces exemples . L'étude s'adapte en dimension 2 ou $n \geq 4$.
On supposera que le corps de base est \mathbb{C} .toute matrice est donc trigonalisable.

6.1. puissance d'une matrice:

- idée de base : Si $M = PAP^{-1}$ on a alors $M^k = PA^kP^{-1}$ $k \in \mathbb{N}$.et même $k \in \mathbb{Z}$ si M est inversible .
- si M est diagonalisable on prend pour A une matrice diagonale et A^k est évident à calculer
- si $n = 3$ et M non diagonalisable : on prend A triangulaire d'un des types précédents . A chaque fois $A = D + N$, D diagonale , N nilpotente tels que $DN = ND$. le binôme de Newton permet alors de conclure.
- dans le cas général vous serez guidé pour trouver une matrice simple semblable à M (En général du type $D + N$ aussi)

6.2. système de suites récurrentes linéaires d'ordre 1:

pour résoudre des récurrences du type

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n + cw_n \\ v_{n+1} = \alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n \\ w_{n+1} = xu_n + yv_n + zw_n \end{cases}$$

, les coefficients $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, x, y, z)$ étant des constantes , on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Le système s'écrit sous la

forme $X_{n+1} = MX_n$ donc $X_n = M^n X_0$. Le calcul de M^n permet alors de conclure.

La méthode se généralise aux systèmes plus gros , sous réserve de pouvoir diagonaliser la matrice.

6.3. suite récurrente linéaire d'ordre 3:

pour résoudre les récurrence du type

$$f_{n+3} = af_{n+2} + bf_{n+1} + cf_n$$

, les coefficients (a, b, c) étant des constantes, on se ramène au cas précédent en posant $u_n = f_n, v_n = f_{n+1}, w_n =$

f_{n+2} . On a alors le système $\begin{cases} u_{n+1} = v_n \\ v_{n+1} = w_n \\ w_{n+1} = cu_n + bv_n + aw_n \end{cases}$

le calcul s'applique aussi aux suites récurrentes d'ordre 2 si vous avez oublié la formule de calcul. (mais perte de temps)

6.4. suite récurrente linéaire d'ordre 3 avec second membre

pour résoudre les récurrences du type

$$f_{n+3} = af_{n+2} + bf_{n+1} + cf_n + d$$

(ou $f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n + d$), les coefficients (a, b, c, d) étant des constantes , on cherche une suite constante solution en posant :

$$l = al + bl + cl + d$$

- si $a + b + c \neq 1$, il existe une unique solution et par différence $(f_{n+3} - l) = a(f_{n+2} - l) + b(f_{n+1} - l) + c(f_n - l)$ et la méthode précédente permet de calculer $f_n - l$
- si $a + b + c = 1$, on cherche une suite solution de la forme $v_n = \alpha n$ qui conduit à l'équation

$$3\alpha = (2a + b)\alpha + d$$

- si $2a + b \neq 3$ il existe une unique solution et par différence $f_n - v_n$ est une suite sans second membre
- si $2a + b = 3$ (et donc $a = c, b = 1 - 2c$) on cherche une solution particulière du type $v_n = \alpha n^2 \dots$ ou $v_n = \alpha n^3$

6.5. commutant d'un endomorphisme (d'une matrice) :

Soit f un endomorphisme diagonalisable. On cherche $G = \{g \in \mathcal{GL}(E), f \circ g = g \circ f\}$. On diagonalise f , chaque sous espace propre de f est stable par g . La matrice de g dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus E_{\lambda_i}(f)$ est donc diagonale par blocs. En particulier la dimension de G est la somme des carrés des multiplicités des valeurs propres.

Si f est seulement trigonalisable, la stabilité des sous espaces propres de f donne certains sous espaces stables par g , donc certaines colonnes de la matrice de g . Il faut en suite prendre les coefficients restant indéterminés, poser le produit de matrice pour en déduire le calcul de ces coefficients (comme la matrice triangulaire a beaucoup de 0, le calcul reste simple).

6.6. sous espaces stables par un endomorphisme diagonalisable:

Il est plus facile de calculer les sous espaces stables dans une base de vecteurs propres.

6.7. Système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

définition : système d'équations différentielles du type $X'(t) = A.X(t) + B(t)$ où $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in C^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$, d'inconnue $X \in C^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$

problème de Cauchy (admis) : Pour tout $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une unique solution vérifiant la condition initiale donnée $X(t_0) = X_0$

- On diagonalise ou on trigonalise A
- On pose $A = PTP^{-1}$ (T diagonale si possible, triangulaire sinon) et $X = PY, B = PC$.
- On obtient le système simplifié : $Y' = TY + C$
- On intègre par composantes.