

Corrigé de CCP PC 2008 Mathématiques 1

PARTIE I

I.1 La matrice $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une matrice carrée réelle positive et symétrique d'ordre n et de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, comptées avec multiplicité.

I.2 a) La matrice carrée M , d'ordre 2, admet deux valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et est semblable à $\text{diag}(-1, 1)$, donc son polynôme caractéristique est :

$$\chi_M(\lambda) = (-1 - \lambda)(1 - \lambda) = \lambda^2 - 1.$$

I.2 b) La trace est nulle donc les coefficients diagonaux sont nuls (puisque une somme de termes positifs est nulle ssi tous les termes le sont) et le déterminant vaut -1 . Une (la) solution est la matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est bien carrée réelle symétrique positive et d'ordre 2 de valeurs propres ± 1 .

I.3 Il suffit de construire S par blocs à partir de la matrice précédente. $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est carrée réelle symétrique positive d'ordre 3, de valeurs propres : $-1, 0, 1$

I.4 Idem par blocs : $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est carrée réelle symétrique positive d'ordre 4, de valeurs propres de S sont $-1, -1, 1, 1$ (avec multiplicité).

I.5 Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une matrice S carrée réelle symétrique positive. Elle est diagonalisable, donc sa trace est la somme des valeurs propres. Or la trace est la somme des coefficients diagonaux positifs par hypothèse alors que la somme des valeurs propres est -2 .

Il n'existe pas de matrice carrée réelle symétrique positive d'ordre 3 admettant pour valeurs propres : $-1, -1, 0$

I.6 a)

- si $n = 1$ une seule valeur propre a .
- Si $n \geq 1$ on commence le calcul du polynôme caractéristique de H en faisant pour $i \geq 1$ $L_i - L_1 - \dots - L_i$

$$\chi_H(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & b & \dots & b \\ b & a-\lambda & b & & b \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & b & a-\lambda & b \\ b & \dots & b & b & a-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & b & \dots & b \\ b-a+\lambda & a-b-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ b-a+\lambda & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a-b-\lambda & 0 \\ b-a+\lambda & 0 & \dots & 0 & a-b-\lambda \end{vmatrix} = (b-a-\lambda)^{n-1} |?|$$

$a-b$ est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$. La dernière est donnée par la trace : $a + (n-1)b$, c'est une autre valeur propre si $b \neq 0$

Les valeurs propres de H sont donc : $\begin{cases} a \text{ (de multiplicité 1) si } n = 1 \\ a + (n-1)b \text{ (de multiplicité 1) et } a-b \text{ (de multiplicité } n-1) \text{ si } n > 1 \text{ et } b \neq 0 \\ a \text{ (de multiplicité } n) \text{ si } n > 1 \text{ et } b = 0 \end{cases}$.

I.6 b)

- si $n = 1$ la valeur propre est l'unique coefficient : réponse : **OUI**
- si $n > 1$ on prend dans H $b = -1$ et $a = n$. La matrice n'est pas positive ($b < 0$) et les valeurs propres $n+1$ et 1 le sont.

Une matrice carrée réelle symétrique d'ordre $n > 1$ ayant toutes ses valeurs propres positives ou nulles n'est pas nécessairement positive

PARTIE II

II.1 a) question de cours classique

II.1 b) D'après a) : ${}^t XSY = {}^t X(SY) = (X|SY)_n$ et ${}^t XSY = {}^t X {}^t SY = {}^t (SX)Y = (SX|Y)_n$.

$$\boxed{\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (X, SY)_n = (SX, Y)_n = {}^t XSX}$$

II.1 c) P est orthogonale donc ${}^t PP = I_n$ et donc avec les formules précédentes:

$$\|PX\|_n^2 = (PX|PX)_n = {}^t (PX)(PX) = {}^t X({}^t PP)X = {}^t X I_n X = {}^t XX = \|X\|_n^2,$$

donc

$$\boxed{\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \|PX\|_n = \|X\|_n}$$

II.2 a) On a, par produit par blocs :

$$(Z|T)_{n+p} = {}^t ZT = ({}^t X, {}^t U) \begin{pmatrix} Y \\ V \end{pmatrix} = {}^t XY + {}^t UV = (X|Y)_n + (U|V)_p.$$

II.2 b) Si X, Y sont orthogonaux dans \mathbb{R}^n et si U, V sont orthogonaux dans \mathbb{R}^p , alors :

$$(Z|T)_{n+p} = (X|Y)_n + (U|V)_p = 0 + 0 = 0$$

donc Z, T sont orthogonaux dans \mathbb{R}^{n+p} .

II.2 c) La réciproque est fautive, il suffit d'avoir $X = Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_n, V = -U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_p$

II.3 a) D existe : toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base ON, et les λ_i sont les valeurs propres de S .

Il existe donc $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $S = PDP^{-1} = PD^t P$.

Si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a : $DY = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix}$ donc :

$$(DY|Y)_n = \sum_{i=1}^n (\lambda_i y_i) y_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \alpha y_i^2 = \alpha \sum_{i=1}^n y_i^2 = \alpha \|Y\|_n^2.$$

soit :

$$\boxed{(DY|Y)_n \leq \alpha \|Y\|_n^2}$$

Les inégalités $\lambda_i \leq \alpha$ sont bien multipliées par des réels positifs y_i^2

II.3 b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$. Notons $Y = {}^t PX$. On a :

$$(SX, X)_n = {}^t X S X = {}^t X P D^t P X = {}^t Y D Y = (D Y, Y)_n \leq \alpha \|Y\|_n = \alpha \|X\|_n^2$$

d'où comme $\|X\|_n^2 > 0$

$$\boxed{\frac{(SX|X)_n}{\|X\|_n^2} \leq \alpha}$$

II.3 c) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$. Décomposons X sur une base orthonormale $\mathcal{B} = (V_1, \dots, V_n)$ de vecteurs propres de S (qui existe puisque S est symétrique réelle) : $X = \sum_{i=1}^n x_i V_i$. On a alors :

$$(SX|X)_n = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i V_i \mid \sum_{i=1}^n x_i V_i \right)_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \text{ et } \alpha \|X\|_n^2 = \alpha \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

On a l'égalité $(SX|X)_n = \alpha \|X\|_n^2$ si et seulement si

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \alpha) x_i^2 = 0$$

Une somme de termes négatifs est nul ssi tous les termes sont nuls.

$$\forall i \in [1, n], \alpha = \lambda_i \text{ ou } x_i = 0$$

$$X = \sum_{\lambda_j = \alpha} x_j V_j$$

On a une égalité si et seulement si X est un vecteur propre pour la valeur propre α

II.4 a) $X \in E \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \geq 0$. E est donc l'intersection des n demi plans fermés $x_i \geq 0$ donc un fermé de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
Rappel : chaque demi plan est fermé comme image réciproque du fermé $[0, +\infty[$ par l'application linéaire (donc continue) $X \mapsto x_i$.

II.4 b) Σ est la sphère unité, c'est donc un compact (fermé comme image réciproque de $\{1\}$ par $X \mapsto \|X\|_n$ continu).
 C est donc fermé (intersection de 2 fermés) borné (sous ensemble d'un borné) donc compact.

$$\boxed{C \text{ est un compact de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

II.4 c) En notant $S = (s_{ij})_{ij}$ et $X = (x_i)_i$, on a :

$$\varphi(X) = {}^t X S X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i s_{ij} x_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} s_{ij} x_i x_j.$$

Il en résulte, par somme et produit de fonctions des fonctions continues ($X \mapsto x_i$) que φ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarque : il me semble plus classique de vérifier que la fonction est bilinéaire donc continue (dimension finie)

II.4 d) Puisque φ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, à valeurs réelles, et que C est compact, $\varphi(C)$ est un compact de \mathbb{R} , donc un bornée et ses bornes sont atteinte. En particulier, $\mu = \sup(\varphi(X), X \in C)$ existe et il existe $X_0 \in C$ tel que $\varphi(X_0) = \mu$.

II.4 e) Comme $X_0 \in C \subset \Sigma$, on a $\|X_0\|_n = 1$, d'où, d'après **II.3 b)** : $\mu = \varphi(X_0) = (S X_0 | X_0)_n = \frac{(S X_0 | X_0)_n}{\|X_0\|_n^2} \leq \alpha$.

$$\boxed{\mu = \sup(\varphi(X), X \in C) = \varphi(X_0) \leq \alpha}$$

II.5 a) i) par construction $W \in E$, et on a : $\|W\|_n^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|X\|_n^2 = 1$,

donc $W \in \Sigma$, et on obtient : $W \in C$.

II.5 a) ii) On a, avec les notations de **I.4 c)** et en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |\varphi(X)| &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} s_{ij} x_i x_j \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} |s_{ij} x_i x_j| \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} s_{i,j} |x_i x_j| \text{ car } S \text{ es positive} \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} s_{ij} |x_i| |x_j| = \varphi(W). \end{aligned}$$

II.5 a) iii) Par définition de μ , comme $W \in C$, $\mu \geq \varphi(W)$, et donc d'après ii) : $\mu \geq |\varphi(X)|$.

Mais, puisque X est un vecteur propre associé à la valeur propre α de S , on a $SX = \alpha X$, donc :

$$\varphi(X) = {}^t X S X = {}^t X (\alpha X) = \alpha {}^t X X = \alpha \|X\|_n^2 = \alpha.$$

On conclut :

$$\boxed{\mu \geq \alpha}$$

II.5 b) • D'après **II.4 e)** et **II.5 a) iii)**, on a : $\alpha \geq \mu \geq |\alpha| \geq 0$, donc : $\alpha \geq 0$ et $\mu = \alpha$

• Or $\varphi(W) = \frac{(S W | W)_n}{\|W\|_n^2} = \alpha$. D'après **II.3.c)** W est un vecteur propre associé à la valeur propre α et par construction W est positif.

$$\boxed{S \text{ admet un vecteur propre positif associé à la valeur propre } \alpha}$$

II.5 c) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$.

On procède ensuite avec λ_i comme avec α : il existe $X_i = (x_{i,j})_{j=1}^n \in \Sigma$ vecteur propre tel que $S X_i = \lambda_i X_i$. On considère $W_i = (|x_{i,j}|)_{j=1}^n$

On a toujours $W_i \in C$ et $|\varphi(X_i)| \leq \varphi(W_i) \leq \mu$. et donc comme $\mu = \alpha$; $|\varphi(X_i)| \leq \alpha$.

Mais $\varphi(X_i) = (S X_i | X_i)_n = (\lambda_i X_i | X_i)_n = \lambda_i \|X_i\|_n^2 = |\lambda_i|$. on a donc :

$$\boxed{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\lambda_i| \leq \alpha}$$

Remarque : on peut au moins dire que $\lambda_i \leq \alpha$ par définition de α

PARTIE III

Les deux matrices sont symétriques réelles , d'où l'existence des deux BON proposées.

La matrice proposée existe et est diagonale par blocs : les matrices A et B sont diagonales , $Y_1^t X_1$ est le produit d'une matrice $p \times 1$ et d'une matrice $1 \times n$, c'est une matrice $p \times n$, autant de lignes que B et autant de colonnes que A .idem pour $X_1^t Y_1$. on pourra faire du calcul par blocs.

III.1

• Soit $i \in \{2, \dots, n\}$. On a $Z_i \neq 0$ car $X_i \neq 0$, et $M_s Z_i = \begin{pmatrix} AX_i \\ sY_1^t X_1 X_i \end{pmatrix}$, or (X_i) est orthonormé donc pour $i \neq 1$,
 ${}^t X_1 X_i = (X_1 | X_i)_n = 0$ et par définition de X_i on a $AX_i = \alpha_i X_i$
donc

$$\boxed{\text{pour } i \geq 2 \text{ } Z_i \text{ est un vecteur propre de } M_s \text{ pour la valeur propre } \alpha_i}$$

• de même

$$\boxed{T_j \text{ est un vecteur propre de } M_s \text{ pour la valeur propre } \beta_j}$$

III.2 a) On a :

$$\|V(\theta)\|_{n+p}^2 = \|\cos(\theta)X_1\|_n^2 + \|\sin(\theta)Y_1\|_p^2 = \cos^2(\theta)\|X_1\|_n^2 + \sin^2(\theta)\|Y_1\|_p^2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1,$$

donc

$$\boxed{V(\theta) \text{ est unitaire dans } \mathbb{R}^{n+p}}$$

III.2 b) on reprend le calcul du III.1 comme $s = 0$ la relation $sY_1^t X_1 X_i = 0$ est vérifiée même si $i = 1$, et donc Z_1 est vecteur propre associé à la valeur propre α_1 . Et de même T_1 pour β_1 .

On vérifie que $\{Z_i\}_{i=1}^n \cup \{T_j\}_{j=1}^p$ est une base de \mathbb{R}^{n+p}

$$\sum_{i=1}^n a_i Z_i + \sum_{j=1}^p b_j T_j = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i X_i = 0 \\ \sum_{j=1}^p b_j Y_j = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall i \ a_i = 0 \\ \forall j \ b_j = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{Sp(M_0) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_p\} \text{ avec multiplicité.}}$$

III.2 c) i) On a $\theta_1 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ intervalle de bijection de tan :

$$\begin{aligned} \theta_1 = 0 &\implies \tan(\theta_1) = 0 \implies \beta_1 - \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2} = 0 \\ \implies \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2} &= \alpha_1 - \beta_1 \implies (\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2 = (\alpha_1 - \beta_1)^2 \implies s = 0, \end{aligned}$$

or $s \neq 0$. donc

$$\boxed{\theta_1 \neq 0}$$

et donc $\theta_2 \in]0, \pi[-\{\pi/2\}$ et $\tan(\theta_2)$ existe

III.2 c) ii) On a :

$$\tan(\theta_1) \tan(\theta_2) = \tan(\theta_1) \tan\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \tan(\theta_1) (-\cotan(\theta_1)) = -1$$

III.2 c) iii) On reconnaît dans $\tan(\theta_1)$ la relation $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ qui donne une racine de $ax^2 + bx + c = 0$. avec $a = s$,
 $b = (\alpha_1 - \beta_1)$, $c = -s$: et donc $\tan(\theta_1)$ est racine de $sX^2 + (\alpha_1 - \beta_1)X - s = 0$.

Pour cette équation le produit des racines est $-\frac{c}{a} = -1$. l'autre racine est donc $\frac{-1}{\tan(\theta_1)} = \tan(\theta_2)$.

On vérifie que $\alpha_1 + sX = \beta_1 + \frac{s}{X} \iff sX^2 + (\alpha_1 - \beta_1)X - s = 0$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \theta_1 \text{ et } \theta_2 \text{ vérifient l'équation } \alpha_1 + s \tan \theta = \beta_1 + \frac{s}{\tan \theta}}$$

et (ce qui est le plus important pour la suite) $\tan(\theta_2)$ est l'autre racine du trinôme du second degré donc

$$\tan(\theta_2) = \frac{\beta_1 - \alpha_1 - \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2}}{2s}$$

III.2 c) iv) On a pour $k \in [[1, 2]]$

$$\begin{aligned} M_s V(\theta) &= \begin{pmatrix} A & sX_1^t Y_1 \\ sY_1^t X_1 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) X_1 \\ \sin(\theta_k) Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) AX_1 + s \sin(\theta_k) X_1^t Y_1 Y_1 \\ \cos(\theta_k) sY_1^t X_1 X_1 + \sin(\theta_k) BY_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) \alpha_1 X_1 + s \sin(\theta_k) X_1 \cdot 1 \\ \cos(\theta_k) sY_1 \cdot 1 + \sin(\theta_k) \beta_1 Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\alpha_1 + s \tan(\theta_k)] [\cos(\theta_k) X_1] \\ \left[\frac{s}{\tan(\theta_k)} + \beta_1 \right] [\sin(\theta_k) Y_1] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\alpha_1 + s \tan(\theta_1) = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \beta_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2})$

et $\frac{s}{\tan(\theta_1)} + \beta_1 = \beta_1 - s \tan(\theta_2) = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \beta_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2})$

Donc pour $\mu_1 = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \beta_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2})$

$$M_s V(\theta_1) = \mu_1 V(\theta_1).$$

et de même avec $\mu_2 = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \beta_1 - \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2})$

D'autre part, $V(\theta_k) \neq 0$, car $V(\theta_k)$ est unitaire, cf. **III.2 a)**.

$V(\theta_k)$ est un vecteur propre de M_s et la valeur propre correspondante est μ_k défini ci dessus

III.2 c) v) on étudie la famille : $F = \{V(\theta_1), V(\theta_2), Z_2, Z_3, \dots, Z_n, T_2, T_3, \dots, T_p\}$

•

$$\begin{aligned} (V(\theta_1) | V(\theta_2))_{n+p} &= (\cos(\theta_1))(\cos(\theta_2))(X_1 | X_1)_n + (\sin(\theta_1))(\sin(\theta_2))(Y_1 | Y_1)_p \\ &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}$$

et donc :

$$V(\theta_1) \perp V(\theta_2)$$

• Pour tout $i \in [[2, n]]$ et $k \in [[1, 2]]$: $(V(\theta_k) | Z_i)_{n+p} = (\cos \theta_k)(X_1 | X_i)_n + (\sin \theta_k)(X_1 | 0)_p = 0$, car $X_1 \perp X_i$

$$V(\theta_k) \perp Z_i$$

et, de même : .

$$V(\theta_k) \perp T_j$$

• On vérifie de même

$$\forall \{i, j\}, Z_i \perp T_j$$

$$i \neq j \Rightarrow Z_i \perp Z_j \text{ et } T_i \perp T_j$$

• On a déjà vu que $V(\theta_1)$ et $V(\theta_2)$ sont unitaires, cf. **III.2 a)**.

• pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, $\|Z_i\|_{n+p}^2 = \|X_i\|_n^2 = 1$ et, pour tout $j \in \{2, \dots, p\}$, $\|T_j\|_{n+p}^2 = \|Y_j\|_p^2 = 1$.

• Enfin F a $n + p$ éléments et $\dim(\mathbb{R}^{n+p}) = n + p$.

On conclut que F est une base orthonormale de \mathbb{R}^{n+p} .

les valeurs propres (avec multiplicité) sont : $\mu_1, \mu_2, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_2, \dots, \beta_p$.

III.2 c) vi) Si $s = 0$ on a :

$$\mu_1 = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \beta_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 0}) = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \beta_1 + |\alpha_1 - \beta_1|)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \beta_1 - \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 0}) = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \beta_1 - |\alpha_1 - \beta_1|)$$

On a donc $\mu_1 = \alpha_1, \mu_2 = \beta_1$ ou $\mu_2 = \alpha_1, \mu_1 = \beta_1$ selon le signe de $\alpha_1 - \beta_1$. Les autres valeurs propres sont les mêmes de façon évidente.

PARTIE IV

IV.1 Soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 \geq 0$. La matrice carrée d'ordre 1, $A = (\lambda_1)$ est élément de $\mathbf{S}_1(\mathbb{R}^+)$ et λ_1 est valeur propre de A . Ainsi, (P_1) est trivialement vraie.

IV.2 a) On a

$$: a = \lambda_1 + \lambda_{n+1} \geq -(\lambda_2 + \dots + \lambda_n) \geq 0$$

car les λ_i sont négatifs pour $i \geq 2$. On a aussi

$$a + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = (\lambda_1 + \lambda_{n+1}) + (\lambda_2 + \dots + \lambda_n) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1} \geq 0.$$

$(a, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ vérifie $a \geq 0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ et $a + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \geq 0$.

D'après (P_n) , il existe $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $a, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ soient les valeurs propres de A , avec multiplicité.

IV.2 b) D'après **II.5 b)** comme $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}^+)$, A admet un vecteur propre unitaire positif associé à la valeur propre a .

IV.2 c) i) Si on pose $p = 1$, $B = (0)$, (qui est bien une matrice carrée réelle symétrique), et $Y_1 = (1)$, (qui est bien un vecteur propre unitaire de B). on a bien que la matrice M_s proposée est de la forme **(1)** de la partie **III**.

IV.2 c) ii) • Avec les notations de **III.2**, on a $:\alpha_1 = a, \alpha_2 = \lambda_2, \dots, \alpha_n = \lambda_n, \beta_1 = 0$

On a donc :

$$\tan \theta_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4s^2}}{2s}, \tan \theta_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4s^2}}{2s}$$

$$\mu_1 = \alpha_1 + s \tan \theta_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4s^2}}{2}, \text{ et } \mu_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4s^2}}{2}.$$

La liste des valeurs propres de M_s , avec multiplicité, est donc :

$$\frac{a + \sqrt{a^2 + 4s^2}}{2}, \frac{a - \sqrt{a^2 + 4s^2}}{2}, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

IV.2 c) iii) Prenons $s = \sqrt{-\lambda_1 \lambda_{n+1}}$, ($-\lambda_1 \lambda_{n+1} \geq 0$ d'après les hypothèses sur les λ_i). On a alors :

$$\sqrt{a^2 + 4s^2} = \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_{n+1})^2 + 4(-\lambda_1 \lambda_{n+1})} = |\lambda_{n+1} - \lambda_1|$$

or $\lambda_1 \geq \lambda_{n+1}$ donc : $\sqrt{a^2 + 4s^2} = \lambda_1 - \lambda_{n+1}$ et donc

$$\frac{a + \sqrt{a^2 + 4s^2}}{2} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_{n+1} + \lambda_1 - \lambda_{n+1}) = \lambda_1, \text{ et } \frac{a - \sqrt{a^2 + 4s^2}}{2} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_{n+1} - \lambda_1 + \lambda_{n+1}) = \lambda_{n+1}.$$

On conclut que, pour ce choix de s , les valeurs propres de M_s sont : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$.

Donc il existe A (égale à M_s) dans $\mathbf{S}_{n+1}(\mathbb{R}^+)$ telle que les valeurs propres de A , (avec multiplicité) soient : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$, (P_{n+1}) est vérifié

Par récurrence sur n .

$$\boxed{(P_n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$$

IV.3 a) On remarque d'abord que la matrice A proposée est carrée réelle d'ordre 3, positive et symétrique.

On calcule le polynôme caractéristique de A : (on commence par $L_1 - L_2$ pour avoir le facteur $-\lambda - 1$)

$$\chi_A(\lambda) = (6 - \lambda)(-3 - \lambda)(-1 - \lambda)$$

On conclut :

$$\boxed{Sp(A) = \{-3, -1, 6\}}$$

IV.3 b) Comme par hasard $6 = 9 - 3$ et on peut appliquer la méthode de la récurrence avec les λ_i .

Avec les notations de **IV.2** :

$$n = 3, a = \lambda_1 + \lambda_4 = 6, s = \sqrt{-\lambda_1 \lambda_4} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Après calcul on trouve que $X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre unitaire de A associé à la valeur propre $a = 6$.

La matrice M_s construite en **IV.2 c)** convient et on a :

$$M_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$