ESPACE EUCLIDIEN

Dans tout le chapitre $(E, < .,. >)$ est un espace vectoriel euclidien

1. COMPLEMENTS

1.1. Expression matricielle:

Si A est une matrice de taille 1×1 on identifiera A et son unique coefficient: $(a_{1,1}) = a_{1,1}$
Soit $B = (e_i)_{i=1}^n$ une base de E. On pose $X = Mat_{(e_i)}(x)$. Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique il existe une unique matrice A symétrique telle que $\phi(x, y) = {}^tXAY$. On dit que A est la matrice du produit scalaire dans la base B . .
calcul : $\forall (i, j) \in [[1, n]]^2, a_{i,j} = \phi(e_i, e_j)$
cas particulier :La matrice du produit scalaire dans une base orthonormée est l'identité.

1.2. produit scalaire et forme linéaire

Soit E un espace vectoriel euclidien.

- On sait déjà que pour tout vecteur v fixé l'application $f_v : x- > \langle v, x \rangle$ est une forme linéaire
- Réciproquement pour toute forme linéaire f sur E, il existe un unique vecteur v tel que, pour tout x, $f(x) = \langle v, x \rangle$.

2. Endomorphismes orthogonaux

2.1. Théorème:

Si f est un endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien E alors les trois propositions équivalent:

- f conserve la norme:
$$\forall x \in E \ , \ \|f(x)\| = \|x\|$$
- f conserve le produit scalaire:
$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$
- f transforme une base orthonormale en une base orthonormale.

2.2. définition:

On appelle endomorphisme orthogonal (ou isométrie vectorielle) tout endomorphisme vérifiant ces propriétés
Ce sont donc des automorphismes de E.
Exemple:les symétries orthogonales.
Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée réflexion. Le déterminant d'un réflexion est -1 .
danger : une projection orthogonale n'est pas un endomorphisme orthogonal.

2.3. similitude

une similitude est le composé (commutatif) d'un endomorphisme orthogonal et d'une homothétie de rapport non nul.

2.4. Groupes $O(E), SO(E)$

On appelle groupe orthogonal de E noté $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E .C'est un groupe pour la composition.
On appelle groupe spécial orthogonal de E noté $SO(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux directs de E .C'est un groupe pour la composition.

2.5. matrice orthogonale:

On appelle matrice orthogonale toute matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base orthonormale.
C'est donc une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
critère:Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il y a équivalence entre :

- A est une matrice orthogonale
- A est la matrice de passage entre deux bases orthonormales .
- A est inversible et ${}^tA = A^{-1}$

conséquence: si A est une matrice orthogonale $\det(A) = \pm 1$ **(ce n'est pas une équivalence)**
si f est un endomorphisme orthogonal $\det(f) = \pm 1$

2.6. groupes $O(n), SO(n)$

On appelle groupe orthogonal $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales . C'est un groupe pour le produit matriciel.
On appelle groupe spécial orthogonal $SO(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant $+1$.C'est un groupe pour le produit matriciel.

2.7. produit mixte

On se place dans E espace vectoriel euclidien orienté.
Soit $(x_i)_{i=1}^n$ une famille de n vecteurs de E, $\det\limits_B(x_i)$ est indépendant de la base orthonormale directe de calcul .
C'est le produit mixte des vecteurs.
Il est parfois noté $[x_i]$

2.8. produit vectoriel en dimension 3

Dans le cas particulier de $\mathbb{R}^3$ soient u et v deux vecteurs fixés. Comme $x- > [u,v,x]$ est une forme linéaire, il existe un unique vecteur z tel que $[u,v,x] = \langle z, x\rangle$. on note $z = u \wedge v$.
On a les propriétés:

- $(u,v) - > u \wedge v$ est bilinéaire, antisymétrique de $\left(\mathbb{R}^3\right)^2$ dans $\mathbb{R}^3$
- (u,v) est lié si et seulement si $u \wedge v = \overrightarrow{0}$
- si (u,v) est libre $u \wedge v$ est orthogonal à u et v et la base $(u,v,u\wedge v)$ est direct.
- Si u et v sont unitaires et orthogonaux $(u,v,u\wedge v)$ est une base orthonormale directe.
- $\|u \wedge v\| = \|u\| . \|v\| . |\sin(u,v)|$

2.9. endomorphisme orthogonal en dimension 2

tout endomorphisme orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2 est soit

- une rotation s'il est direct . Il existe alors un réel θ telle que sa matrice dans toute base orthonormale soit:

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

  De plus $\theta \to M_\theta$ est un morphisme surjectif de $\mathbb{R}$ sur $SO(2)$ de noyau $2\pi\mathbb{Z}$
- une symétrie orthogonale par rapport à une droite (réflexion) s'il est indirect.

2.10. endomorphisme orthogonal en dimension 3

- tout endomorphisme orthogonal se décompose comme composé d'au plus 3 réflexions.
- tout endomorphisme orthogonal direct f admet la valeur propre 1 Si l'endomorphisme n'est pas l'identité , le sous espace propre E_1est une droite . La matrice de f dans une base orthonormale adaptée est alors:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

pour trouver l'angle θ on utilise que $tr(f) = 1 + 2\cos(\theta)$ puis l'image d'un vecteur v de $E_1^{\perp}$ pour avoir $\sin(\theta)$

- tout endomorphisme orthogonal indirect f admet la valeur propre -1 Si l'endomorphisme n'est pas l'opposé de l'identité , le sous espace propre E_{-1}est une droite . La matrice de f dans une base orthonormale adaptée est alors:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

pour trouver l'angle θ on utilise que $tr(f) = -1 + 2\cos(\theta)$ puis l'image d'un vecteur v de $E_{-1}^{\perp}$

- L'ensemble des endomorphismes orthogonaux peut aussi se classer selon leurs invariants:
  - l'espace entier : c'est l'identité
  - un plan : c'est une réflexion (et c'est un endomorphisme orthogonal indirect)
  - une droite:c'est une rotation (et c'est un endomorphisme orthogonal direct)
  - le singleton $\{0\}$:C'est un endomorphisme orthogonal indirect f qui n'est pas une réflexion .

3. Endomorphismes symétriques

3.1. Définition:

f est un endomorphisme symétrique si et seulement si :

- $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, f(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle$

ce qui équivaut à dire :

- dans une base orthonormale B, $A = Mat_B(f)$ est symétrique. L'ensemble des endomorphismes symétriques est donc un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$

Exemple:

- Les homothéties sont des endomorphismes symétriques
- un projecteur est une projection orthogonale si et seulement si il est symétrique
- une symétrie est une symétrie orthogonale si et seulement si elle est symétrique

3.2. propriétés d'un endomorphisme symétrique

Soient f un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien et M sa matrice dans une base orthonormale.

- Le noyau et l'image de f (de M) sont orthogonaux.
- deux sous espaces propres distincts de f (de M) sont orthogonaux.
- l'orthogonal de tout sous espace stable par f est stable par f .
- $Sp_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{R}$
- f est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.
- il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que $P = PDP^{-1} = PD^tP$

conséquence:
toute matrice symétrique **réelle** A est diagonalisable dans une base orthonormée :
Remarque:Exemple de matrice symétrique complexe non diagonalisable :

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Forme quadratique et application aux courbes du second ordre

4.1. Forme quadratique

4.1.1. définition:

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique .

- L'application définie sue E par $v->Q(v)=\phi(v,v)$ est appelée forme quadratique.
- On dit que ϕ est la forme polaire de Q.
  En particulier pour le produit scalaire : $v->\|v\|^2$ est une forme quadratique.

4.1.2. calcul de la forme polaire

Si Q est une forme quadratique :

$$\forall(v,w)\in E^2\ ,\ \phi(v,w)=\frac{Q(v+w)-Q(v)-Q(w)}{2}=\frac{Q(v+w)-Q(v-w)}{4}$$

4.1.3. calcul dans une base

Soit A une matrice symétrique réelle.
Si dans une base B $\phi(v,w)=\,^tVAW$, alors $Q(v)=\,^tVAV=\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}v_i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}a_{i,j}v_iv_j$
La formule précédente permet trouver la matrice de Q .
Exemple si $n=2$: si $Q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ alors $Q(x,y)=\,^tXAX$ avec $A=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$

4.1.4. expression dans une base orthonormale de vecteurs propres.

A étant symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres : $\exists P\in\mathcal{O}_n$, $A=PD^tP$.
Si un vecteur v admet dans la base initiale une matrice V une matrice X , la formule de changement de base donne $X=PV$ a donc

$$Q(v)=\,^tVAV=\,^tVPD^tPV=\,^t\left(^tPV\right)D\left(^tPV\right)=^t XDX$$

dans la base de vecteurs propres la matrice de la forme quadratique est diagonale : $Q(v)=\sum_{i=1}^{n}d_ix_i^2$

4.2. Application aux courbes du second ordre dans un repère orthonormal

4.2.1. définition

toute courbe ayant dans un repère orthonormé une équation du type:

$$F(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 \text{ avec } (a,b,c)\neq(0,0,0)$$

est dite courbe du second ordre.
L'équation dans tout repère est alors un polynôme en x et y de "degré total" 2.
On peut considérer la forme quadratique $Q(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ et la forme linéaire $L(x,y)=2dx+2ey$. ;On a alors $F(x,y)=Q(x,y)+L(x,y)+f=0$

4.2.2. rappels de première année :

une telle courbe est soit vide,soit un point,soit une conique (ellipse , hyperbole , parabole , cercle),soit l'union de deux droites distinctes ou non.

4.2.3. réduction de la forme quadratique

Soit S la matrice symétrique associée à la forme quadratique. On peut diagonaliser S dans une base orthonormée . Comme S n'est pas la matrice nulle il existe au moins une valeur propre non nulle.

- On a $S=\,^tPDP$ avec P matrice orthogonale et $D=diag(a',b')$ diagonale.
  Donc si $X'=PX$ on a :$^tXQX:=\,^tX'DX'=a'x'^2+c'y'^2$ (avec $a'\neq0$)

Si on se place dans un repère de centre O et de vecteur de base les vecteurs propres de M on a après changement de base

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = a'x'^2 + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f \text{ , (avec } a' \neq 0)$$

La diagonalisation de la matrice symétrique réelle remplace avantageusement les méthodes de première année pour faire disparaître le double produit.
Le reste de la réduction se fait en reprenant les méthodes de première année (**cf poly "courbes rappel de sup"**).
Si la conique est à centre l'ordre des calculs restent le même : d'abord la translation pour "éliminer la forme linéaire" puis réduction de la forme quadratique.