

1. A préparer pour le TD

1. nature des endomorphismes de \mathbb{R}^3 de matrice:

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ puis } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ montrer que $A = M^t M$ est symétrique et que ses valeurs propres sont positives
3. Soit S une matrice symétrique réelle montrer que $S + iI_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$
4. Montrer que si A et une matrice symétrique réelle la somme des carrés des coefficients de A est égale à la somme des carrés des valeurs propres.
(utilisez la trace de A^2)
5. Soit A une matrice carrée $n \times n$ symétrique réelle et X une matrice colonne .Montrer :

$$AX = 0 \Leftrightarrow A^2 X = 0$$

6. Soit A une matrice symétrique réelle. Existence et calcul d'une matrice symétrique réelle vérifiant $B^3 = A$
7. Soit A une matrice symétrique réelle telle que $\exists k \in \mathbb{N} A^k = I_n$. Calculer A^2
8. Dans l'espace on se donne une base quelconque $(a_i)_{i=1}^3$. Montrer l'existence d'une base $(b_i)_{i=1}^3$ telle que pour tous i, j
 $\langle a_i, b_j \rangle = \delta_{i,j}$

2. travail autonome:

1. dans le plan soit le produit scalaire $\phi(v, v') = xx' + 5yy' - 2(xy' + x'y)$ si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
1. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire
 2. Déterminer une base orthonormée du plan pour ϕ .
 3. Soit f ayant dans la base canonique la matrice $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, déterminer a de sorte que f soit symétrique pour ϕ .
2. Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormale B . Soit $(a_i)_{i=1}^p$ une base orthonormale d'un sous espace F .On note $A = \text{Mat}_B(a_i)$.Pour tout vecteur x on note $X = \text{Mat}_B(x)$
- si $x \in F^\perp$ montrer que $A^t A X = (0)$
 - si $x \in F$ montrer $A^t A X = X$ (commencer par prendre $x = a_i$)
 - Montrer que la matrice de la projection orthogonale sur F est $A^t A$
3. On muni \mathbb{R}^3 du produit scalaire canonique .Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in]0, \pi[$. On pose

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\alpha) & \cos(\beta) \\ \cos(\alpha) & 1 & \cos(\gamma) \\ \cos(\beta) & \cos(\gamma) & 1 \end{pmatrix}$$

et on suppose $\det(M) > 0$. montrer qu'il existe trois vecteurs $(v_i)_{i=1}^n$ tels que $m_{i,j} = \langle v_i | v_j \rangle$
(partir d'une BON (i, j, k) et s'inspirer de l'algorithme de Schmidt)

4. Soit $n > 1$ et $A \in O_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un réel α vérifiant $(A - \alpha I_n)^2 = 0$
- quelles sont les valeurs possibles de α
 - si $\alpha = 1$
 - simplifier ${}^t A (A - I_n)^2$
 - en déduire ${}^t (A - I_n) (A - I_n) = 0$
 - montrer $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^t M M = (0) \implies M = (0)$. En déduire A .
 - Donner toutes les solutions de l'équation.

5. On veut résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\begin{cases} M^t M = {}^t M M \\ M^2 = 4I_2 \end{cases}$

- Soit $N = \frac{{}^t M M}{4}$. Montrer que N est une matrice symétrique, orthogonale, à valeurs propres positives.
- En déduire que $N = I_n$
- Montrer alors que $\frac{M}{2}$ est la matrice d'une symétrie orthogonale dans une base orthonormale.
- Vérifier la réciproque

6. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $P_k = X^3 - X^2 + k \in \mathbb{R}_3[X]$

- développer $(a+b+c)^2$ et montrer $(a+b+c)^3 = (a^3 + b^3 + c^3) + 3(a+b+c)(ab+ac+bc) - 3abc$
- Montrer que si $A \in SO_3(\mathbb{R}) \exists k \in \mathbb{R}$ tel que a, b, c soient les trois racines (distinctes ou non) de P_k
- A quelle condition sur k le polynôme précédent a-t-il 3 racines réelles?

7. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien. Montrer l'équivalence des deux propriétés:

- (1) $\forall x \in E, \langle x, u(x) \rangle \geq 0$
 (2) $Sp(u) \subset \mathbb{R}^+$

8. Soit $E = C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$

Soit u une fonction de E vérifiant : $u(0) = u(1) = 0$. On définit

$$T : f \rightarrow u' f' + u f''$$

Montrer que T est un endomorphisme symétrique de E .

9. Soit A une matrice symétrique réelle vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $A = 0$

10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente vérifiant ${}^t A A = A {}^t A$. montrer que $A = 0$ en introduisant $S = {}^t A A$

11. Soit E un espace vectoriel euclidien.

pour $f \in \mathcal{L}(E)$ on pose $N(f) = \sup \{ \|f(x)\|, \|x\| \leq 1 \}$

- Vérifier que N est une norme
- montrer que $N(f) = \sup(\langle f(x), y \rangle, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1)$
- Soit u tel que $N(u) \leq 1$ et $\exists x \in Ker(u - Id), x \neq 0$. montrer que $N(u) = 1$

12. Soit f un endomorphisme orthogonal d'un EVE de dimension $d > 0$

- montrer que $Ker(f - Id)$ et $Im(f - Id)$ sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux.
- Soit $p_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k$. Calculer $p_n(x)$ si $x \in Ker(f - Id)$ puis si $x \in Im(f - Id)$.
- calculer la limite de la suite p_n

13.

- Soit (u, v, w) trois vecteurs de l'espace tels que : $u = v \wedge w, v = w \wedge u, w = u \wedge v$, montrer que (u, v, w) est une base orthonormale directe
- Soit f un endomorphisme tel que : $\forall(x, y), f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.
Montrer que f est une rotation
- Réciproque?