Semaine n°26 du 13 au 18 mai 2024

L'intégrale de Riemann

- Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Définition-construction de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment et à valeurs réelles (admis).
- Propriétés immédiates : linéarité, positivité, relation de Chasles.
- Notation, avec $a < b$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Extension au cas $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- Croissance de l'intégrale. Valeur moyenne. Inégalité (avec $a < b$) : $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.
- Si f est continue sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\int_a^b f = 0$, alors $f = \tilde{0}$ sur $[a, b]$.
- Sommes de Riemann : si f est une fonction **continue** sur le **segment** $[a, b]$, alors :
$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$
- Théorème Fondamental de l'Analyse : si f est une fonction continue sur l'intervalle I et a un point de I, alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.
  Conséquence : toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.
  Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.
  Intégration par parties, changement de variable : rappels. **Inégalité** de Taylor-Lagrange.
  Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle et à valeurs complexes : définition au moyen des parties réelle et imaginaire. Majoration du module de l'intégrale.

Espaces vectoriels et dimension finie

- Espace vectoriel de dimension finie (engendré par une famille finie de vecteurs). Théorème de la base extraite. Existence d'une base pour un ev non nul de dimension finie.
- Dans un ev engendré par n vecteurs : toute famille de (au moins) $n+1$ vecteurs est liée. Toutes les bases d'un ev de dimension finie ont le même cardinal : définition de la dimension d'un ev. Exemples classiques : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Théorème de la base incomplète.
- Caractérisation des bases : si $\mathrm{card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$,
$$(\mathcal{F} \text{ libre}) \Leftrightarrow (\mathcal{F} \text{ base de } E) \Leftrightarrow (\mathcal{F} \text{ génératrice de } E).$$
- Définition du rang d'une famille finie de vecteurs : $(\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{card}(\mathcal{F})) \Leftrightarrow (\mathcal{F}$ est libre$)$.
- Dimension d'un sev d'un ev de dimension finie : cas d'égalité. Existence d'un supplémentaire dans un ev de dimension finie, caractérisation par l'intersection et les dimensions. Dimension de la somme de deux sev (formule de Grassmann). Caractérisation de deux sev supplémentaires en dimension finie.
- Caractérisation des isomorphismes par l'image d'une base. Deux ev sont isomorphes ssi ils ont la même dimension. Entre deux ev de même dimension, une application linéaire est bijective ssi elle est injective OU surjective.
- Applications linéaires de rang fini. Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme. Théorème du rang.
- Si $\dim(E) = n$, alors un sev H de E est un hyperplan si et seulement si $\dim(H) = n - 1$. Equations d'un hyperplan dans une base donnée en dimension finie.

Exercices

Exercice 1 Trouver la limite, lorsque $n \to +\infty$, de :
$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}.$$

Exercice 2 Trouver un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, des termes :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + n^2} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{k+n}}.$$

Exercice 3 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^1. Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 4 On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t$: ensemble de définition et calcul de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 5 On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\arctan(t)}{t}\mathrm{d}t$: justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Parité de f ? Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$, calculer $f'(x)$, et en déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 6 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^1 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, puis un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 7

1. Rappeler le théorème énoncant l'**inégalité de Taylor-Lagrange**.
2. Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$e^x = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Exercice 8 Soit H_1 et H_2, deux hyperplans (i.e sev admettant chacun une droite comme supplémentaire) **distincts** d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n.
Montrer que $H_1 \cap H_2$ est de dimension $n-2$.

Exercice 9 Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de $E = \mathbb{R}_4[X]$ avec :
$F = \{P \in E = \mathbb{R}_4[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$ et $G = \{P \in E = \mathbb{R}_4[X] \mid P(2) = P(3) = P(4) = 0\}$.

Exercice 10 Soit f et g, deux endomorphismes d'un ev E de dimension n. On suppose $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Montrer que ces deux sommes sont directes.

Exercice 11 Soit E, un espace vectoriel de **dimension finie** et f un endomorphisme de E.
Montrer que les 4 propositions suivantes sont équivalentes :
(1) $\boxed{E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)}$, (2) $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)}$, (3) $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)}$ et (4) $\boxed{E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)}$.

Exercice 12 Soit f, un endomorphisme d'un ev E de dimension 3 tel que $f^3 = \tilde{0}$ mais $f^2 \neq \tilde{0}$ (on dit f est un *endomorphisme nilpotent d'indice* 3). Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{a} \in E$ tel que $f^2(\vec{a}) \neq \vec{0}$, puis $\mathcal{B} = (\vec{a}, f(\vec{a}), f^2(\vec{a}))$ est une base de E.
Rang de f ? Matrice de f dans la base $\mathcal{B}$?