# Corrigé Mines-Ponts 2001
# Math I
## PRELIMINAIRES

a)On prend un élément du noyau de $f^k$ et on vérifie sans problème qu'il est dans le noyau de $f^{k+1}$

$$x \in \ker f^k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = 0 \Rightarrow x \in \ker f^{k+1}$$

Donc

$$\boxed{\ker f^k \subset \ker f^{k+1} \text{ pour tout naturel } k}$$

.

b) Montrons par récurrence $H_k$ : $\ker f^k = \ker f^{k+1}$.

- $H_p$ est vraie par hypothèse.
- Si $H_k$ montrons $H_{k+1}$ :
  - L'inclusion $\ker\left(f^{k+2}\right) \subset \ker\left(f^{k+1}\right)$ découle du a)
  - Soit alors $x \in \ker(f^{k+1})$ on a $f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) = 0$ donc $f(x) \in \ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$ par l'hypothèse de récurrence . Et donc $f^{k+2}(x) = f^{k+1}(f(x)) = 0$ d'où $H_{k+1}$
- Ainsi par récurrence,

$$\boxed{\ker f^k = \ker f^{k+1} \text{ pour tout } k > p}$$

$\dim_k = \dim \ker f^k$ est une suite croissante d'entiers naturels.
Par l'absurde si on la suppose strictement croissante alors pour tout $k, \dim_{k+1} \geq \dim_k +1$ donc $\dim_k \geq \dim_0 +k = k$ et $\lim_{+\infty}(\dim_k) = +\infty$ . Absurde car la suite est majorée par $n$ .
Donc il existe un rang $k$ tel que $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$ .Si on prend pour $p$ le plus petit $k$ solution:

- $\forall k < p \ \ker(f^k) \subsetneq \ker(f^{k+1})$ par définition du plus petit
- $\forall k \geq p \ \ker(f^k) = \ker(f^{k+1}) = \ker(f^p)$ .
- De plus $p \leq \dim_p \leq n$ donc $p \leq n$ et donc $\ker f^n = \ker f^{n+1}$

c) Si $u^q = 0$ alors $\ker(u^q) = E$ ce qui impose $\ker(u^{q+1}) = E$ donc $q \geq p$ et la suite des noyaux vaut $E$ pour $k \geq p$ donc $\ker(u^n)E$ soit $\boxed{u^n = 0}$

## PREMIERE PARTIE

*Dans le corrigé j'utilise l'expression "endomorphisme induit" comme dans le programme et non "restriction de l'endomorphisme" comme dans le sujet.*
1)
1a) $g$ commute avec $D_n$ - donc avec $D_n^{p+1}$ - car $D_n = g^2 - \lambda Id$ est un polynôme en $g$.
Alors $\ker D_n^{p+1}$ est stable par $g$ (résultat de cours).
Les polynômes tels que leur dérivé $(p+1)$ème soit nul sont les polynômes de degré inférieur ou égal à $p$ donc $E_p = \ker D^{p+1}$.
$E_p$ étant stable par $D$ et $g$, les endomorphismes induits $g_p$ et $D_p$ vérifient la même relation.
1b) De même que précédemment puisque $D$ est un polynôme en $g$ et $E_n = \ker D^{n+1}$.
1c)
i}
• $F$ est de dimension finie $(n+1)$ .Soit $\mathcal{F}$ une base de $F$.$\mathcal{F}$ étant finie on peut poser $q$ le maximum des degrés des éléments de $\mathcal{F}$ .Toute élément de la base de $F$ est dans $E_q$ donc $F \subset E_q$. Dans ce cas $D^{q+1}F = \{0\}$ donc l'endomorphisme induit de $D_F$ est nilpotent.
$D_F$ est un endomorphisme nilpotent en dimension $n+1$ donc $D_F^{n+1} = 0$ (préliminaire question c)
Alors $D^{n+1}(F) = \{0\}$ donc $F$ est inclus dans $E_n$ et par l'égalité de leur dimension : $F = E_n$.
• Soit maintenant $F$ un sous espace de dimension infinie. Montrons que $F = E$ en montrant que $F$ contient tous les $E_n$ .Soit donc $n$ fixé.
$F$ n'est pas inclus dans $E_n$ car sinon $F$ serait de dimension finie.
donc il existe un polynôme $P$ dans $F$ de degré $m \geq n$.
Si de plus $F$ est $D$-stable, $F$ contient $P, D(P), \ldots, D^m(P)$, famille échelonnée en degrés donc base de $E_m$ .
. Ainsi $F$ contient $E_m$ donc $E_n$.
• En conclusion,

$$\boxed{\text{les sous espaces stables par } D \text{ sont } E, \{0\} \text{ et les } E_n}$$

ii} Puisque $D$ est un polynôme en $g$, tout sous espace $G$ stable par $g$ est stable par $D$.

Réciproquement, si $G$ est stable par $D$ alors (c.i) $G$ est égal à $E, \{0\}$ ou à $E_n$ donc $G$ est stable par $g$ d'après la question I1a)
2)
2a) $\dim E_0 = 1$ et $D_0 = 0$.
La relation $g^2 = \lambda Id + D_0$ se traduit matriciellement par $\gamma^2 = \lambda$ ce qui impose comme on travaille dans les réels que

$$\boxed{\lambda > 0}$$

2b) L'une ou l'autre des existences de $g$ entraîne (d'après I.1.a) l'existence de $g_0$ dans les conditions I-2.a) donc $\lambda \geq 0$. D'où le résultat par contraposition.
3)
3a) $f^n \neq 0$ donc il existe $y$ tel que $f^n(y) \neq 0$. Soit alors $B = (f^n(y), f^{n-1}(y), \ldots, y)$

- la famille a le bon cardinal $card(B) = n + 1 = \dim(E)$
- la famille est libre :
  - soit $a_n f^n(y) + \cdots + a_0 y = 0$ alors en composant par $f^n$ et compte tenu de $f^p = 0$ pour $p > n$, il vient $a_0 f^n(y) = 0$. Comme $f^n(y) \neq 0$, $a_0 = 0$
  - Par récurrence on vérifie alors $H_k : a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$ il suffit de composer par $f^{n-k}$ la combinaison linéaire $a_n f^n(y) + \cdots + a_k f^k(y) = 0$
- Ayant $n+1$ éléments, $B$ est une base de $V$ et

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_0.$$

3b) Puisque $D_n^{n+1} = 0$ et $D_n^n(X^n) = n! \neq 0$, l'existence de $B_n$ est assurée.
*Remarque : c'est l'art de faire faire de la théorie pour pas grand chose une solution évidente est*

$$B = \left(1, X, X^2/2, \cdots X^n/n!\right)$$

Dans cette base, la matrice de $\lambda Id + D_n$ est $A_0 + \lambda I_n$ soit $A_\lambda$.
4)
4a) Avec les notations précédentes, $h(y)$ se décompose sur la base $B_2$ en :

$$h(y) = ay + bD_2(y) + cD_2^2(y).$$

Si de plus $h$ et $D_2$ commutent alors :

$$h(D_2(y)) = aD_2(y) + bD_2(D_2(y)) + cD_2^2(D_2(y))$$

et de même:

$$h(D_2^2(y)) = aD_2^2(y) + bD_2(D_2^2(y)) + cD_2^2(D_2^2(y))$$

Donc $\boxed{h = aId + bD_2 + cD_2^2}$ puisque ces deux endomorphismes coïncident sur la base $B_2$.
4b) D'après I.1.a) et le résultat précédent, nécessairement $g = P(D)$ avec $P = a + bX + cX^2$.
Sous cette forme et compte tenu de la nilpotence de $D$, $g^2 = P^2(D) = a^2 Id + 2abD_2 + (2ac + b^2)D_2^2$.
Enfin $(Id, D_2, D_2^2)$ est libre ( si $\alpha Id + \beta D_2 + \gamma D_2^2 = 0$ alors en prenant la valeur sur le polynôme $X^2$ : $\alpha X^2 + 2\beta X + 2\gamma = 0$ donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$).Donc $g^2 = \lambda Id + D$ si et seulement si $g = aId + bD_2 + cD_2^2$ avec $a^2 = \lambda, 2ab = 1, 2ac + b^2 = 0$.
Ce dernier système n'a de solutions que si $\lambda > 0$ et dans ce cas :
$a = \pm\sqrt{\lambda}, b = \frac{1}{2a}, c = -\frac{1}{8a^3}$.

$$\boxed{\text{Ainsi les solutions de } G^2 = A_1 \text{ sont } G = \pm(I_2 + \tfrac{1}{2}A_0 - \tfrac{1}{8}A_0^2)}$$

# DEUXIEME PARTIE

1)
1a) Si $g^2 = D_n$ alors $g^{2n+2} = 0$ donc $g$ est nilpotent.
donc par le préliminaire b) $0 < dim(ker(g) < \dim(\ker(g^2))$
$\boxed{\dim \ker g^2 \geq 2}$.
1b) Or $\ker g^2 = \ker D_n = E_0$ qui est de dimension 1 ce qui contredit le résultat précédent : $g$ n'existe pas.
c) Si $g^2 = D$ alors par I.1.a il existe $g_n$ tel que $g_n^2 = D_n$ ce qui est impossible.

$$\boxed{g^2 = D \text{ est impossible}}$$

2)
2a) Les primitives d'un polynôme sont des polynômes donc $\boxed{D \text{ est surjective}}$.
Donc pour tout entier $m$ , $D^m$ est surjective donc $D^m(E) = E$ et $g(g^{k-1}(E)) = D^m(E) = E$ donc $\boxed{g \text{ est surjective}}$.
2b) $\forall q \leq k, \quad \ker g^q \subset \ker g^k = \ker D^m = E_{m-1}$ .
Donc $\boxed{\ker g^q \text{ est de dimension finie pour } 0 \leq q \leq k.}$
2c) $\forall P \in \ker g^p, \quad g^{p-1}(\Phi(P)) = g^{p-1}(g(P)) = 0$.
Ainsi $\Phi$ est une application de $\ker g^p$ dans $\ker g^{p-1}$, linéaire comme $g$.
Le noyau de $\Phi$ est $\ker \Phi = \ker g \cap \ker g^p = \ker g$
L'image de $\Phi$ est $\ker(g^{p-1})$: soit $P \in \ker g^{p-1}$, il existe $Q \in E$ tel que $g(Q) = P$ ($g$ est surjective) et $g^p(Q) = g^{p-1}(P) = 0$ donc $Q$ est élément de $\ker g^p$ ce qui légitime $\Phi(Q) = P \in \mathrm{Im}(\Phi)$. D'où $\boxed{\mathrm{Im}(\Phi) = \ker g^{p-1}}$.
Par le théorème du rang :
$\dim \ker \Phi + \dim \mathrm{Im}\, \Phi = \dim \ker g^p$ soit $\dim \ker g + \dim \ker g^{p-1} = \dim \ker g^p$.
Il en résulte $\boxed{\dim \ker g^p = p \dim \ker g \text{ pour tout } 0 \leq p \leq k}$.
2d) $\dim \ker D^m = \dim E_{m-1} = m$ et $g^k = D^m$ donc $k \dim \ker g = m$ et $m$ est un multiple de $k$.
Réciproquement, si $m = pk$ il suffit de prendre $g = D^p$.
D'où la condition nécessaire et suffisante : $\boxed{m \text{ est un multiple de } k}$.
Condition non remplie dans le cas II-1.c car $m = 1$ et $k = 2$.

# TROISIEME PARTIE

1)
1a)

$$\begin{aligned}
(I + tD_n) \circ \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k t^k D_n^k\right) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k D_n^k - (-1)^{k+1} t^{k+1} D_n^{k+1} \\
&= I_{n+1} - (-1)^{n+1} t^{n+1} D_n^{n+1} \text{ par simplification des } \sum \\
&= I_{n+1} \text{ car } D_n^{n+1} = 0
\end{aligned}$$

Même calcul en faisant le produit à gauche. Donc la matrice $I + tD_n$ est inversible et son inverse est définie par :

$$\boxed{(I_{n+1} + tD_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k D_n^k}.$$

1b) L'expression précédente prouve que $t \mapsto (I_{n+1} + tD_n)^{-1}$ est dérivable et que sa dérivée est $\sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k k t^{k-1} D_n^k\right)$.
En dérivant l'égalité $(I_{n+1} + tD_n)^{-1} \circ (I_{n+1} + tD_n) = I_{n+1}$ , il vient en utilisant que si $f$ et $g$ sont des endomorphismes $C^1$ $(f \circ g)' = f' \circ g + f \circ g'$ (comme dérivation d'une application bilinéaire)
$\left((I_{n+1} + tD_n)^{-1}\right)'(t) \circ (I_{n+1} + tD_n) + \left((I_{n+1} + tD_n)^{-1}\right) \circ D_n = 0$ soit

$$\left((I_{n+1} + tD_n)^{-1}\right)'(t) = -\left((I_{n+1} + tD_n)^{-1}\right) \circ D_n \circ \left((I_{n+1} + tD_n)^{-1}\right)$$

Comme de plus $(I_{n+1} + tD_n)^{-1}$ commute avec $D_n$ on peut écrire

$$\left((I_{n+1} + tD_n)^{-1}\right)'(t) = -\left((I_{n+1} + tD_n)^{-2}\right) \circ D_n$$

1c) $L_n(t) = D_n \circ P(D_n)$ où $P$ est le polynôme $P = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k} X^{k-1}$ .Or tout polynôme de l'endomorphisme $D_n$ commute avec $D_n$ . Donc $L_n(t)^{n+1} = D_n^{n+1} P^{n+1}(D_n)$ or $D_n^{n+1} = 0$ d'où $\boxed{L_n^{n+1} = 0}$.
1d) En ajoutant un terme nul à $L_n$ on obtient :
$L_n'(t) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} t^{k-1} D_n^k = D_n \circ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k D_n^k = D_n \circ (I_{n+1} + tD_n)^{-1}$.
Comme $L_n(t)$ et $L_n'(t)$ commutent ( polynômes en $D_n$) on a :

- $\left(L_n^2(t)\right)' = (L_n(t) \circ L_n(t))' = L_n(t) \circ L_n'(t) + L_n'(t) \circ L_n(t) = 2L_n'(t) \circ L_n(t)$
- et par récurrence $\left(L_n^k(t)\right)' = kL_n'(t) \circ L_n^{k-1}(t)$

$$\boxed{\left(L_n^k(t)\right)' = kL_n^{k-1}(t) \circ D_n \circ (I_{n+1} + tD_n)^{-1}}.$$

2)
2a)D'une part

$$\begin{aligned}
\varphi_u(t)\circ\varphi_v(t) &= \sum_{p=0}^{n}\frac{u^p}{p!}\left(L_n(t)\right)^p\circ\sum_{q=0}^{n}\frac{v^q}{q!}\left(L_n(t)\right)^q=\sum_{p=0}^{n}\frac{u^p}{p!}\frac{v^q}{q!}\left(L_n(t)\right)^{p+q}\\
&= \sum_{k=0}^{2n}\sum_{p+q=k}\frac{u^pv^q}{p!q!}L_n(t)^{p+q}\text{ en ordonnant suivant les puissances de }L_n(t)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{p+q=k}\frac{u^pv^q}{p!q!}L_n(t)^{p+q}\text{ car }L_n(t)^k=0\text{ pour }k\geq n+1
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\varphi_{u+v}(t) &= \sum_{m=0}^{n}\frac{(u+v)^m}{m!}L_n(t)^m\\
&= \sum_{m=0}^{n}\sum_{r=0}^{m}\frac{C_m^r}{m!}u^rv^{m-r}L_m(t)^m\text{ par le binôme de Newton,}\\
&= \sum_{m=0}^{n}\sum_{r=0}^{m}\frac{1}{r!(m-r)!}u^rv^{m-r}L_m(t)^m
\end{aligned}$$

Le changement d'indice$p=r,q=m-r$ montre l'égalité des deux expressions.
2b) $t\mapsto\varphi_u(t)$ est dérivable comme combinaison linéaire de fonctions dérivables.
En utilisant III-1.d :

$$\begin{aligned}
\varphi_u'(t) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{u^k}{k!}k(I_{n+1}+tD_n)^{-1}\circ D_n\circ L_n^{k-1}(t)=u(I_{n+1}+tD_n)^{-1}\circ D_n\circ\sum_{k=1}^{n}\frac{u^{k-1}}{(k-1)!}L_n^{k-1}(t)\\
&= u(I_{n+1}+tD_n)^{-1}\circ D_n\circ\sum_{k=0}^{n-1}\frac{u^k}{k!}L_n^k(t)=u(I_{n+1}+tD_n)^{-1}\circ D_n\circ\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}L_n^k(t)\quad\text{car }D_n\circ L_n^n(t)=0\\
&= u(I_{n+1}+tD_n)^{-1}\circ D_n\circ\varphi_u(t)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\varphi_u'(t)=u(I_{n+1}+tD_n)^{-1}\circ D_n\circ\varphi_u(t)}$$

2c) $\varphi_1'$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables et
$\varphi_1''(t)=\left((I_{n+1}+tD_n)^{-1}\right)'(t)\circ D_n\circ\varphi_1(t)+(I_{n+1}+tD_n)^{-1}\circ D_n\circ\varphi_1'(t)$
$=-(I_{n+1}+tD_n)^{-1}\circ D_n\circ(I_{n+1}+tD_n)^{-1}\circ D_n\varphi_1(t)+(I_{n+1}+tD_n)^{-1}\circ D_n\circ(I_{n+1}+tD_n)^{-1}\circ D_n\circ\varphi_1(t)=0$
Ainsi $\boxed{\varphi_1''(t)=0}$ est nul pour tout réel $t$ ; par conséquent $\varphi_1(t)=\varphi_1(0)+t\varphi_1'(0)$.
Comme $L_n(0)=0$ on déduit $\varphi_1(0)=I$ et $\varphi_1'(0)=D_n\circ\varphi_n(0)=D_n$ et l'on conclut :

$$\forall t\in R,\qquad\boxed{\varphi_1(t)=I+tD_n}.$$

3)
3a) $\lambda I+D_n=\lambda(I+\frac{1}{\lambda}D_n)=\lambda\varphi_1(\frac{1}{\lambda})=\lambda(\varphi_{\frac12}(\frac{1}{\lambda}))^2=\left(\sqrt{\lambda}\varphi_{\frac12}(\frac{1}{\lambda})\right)^2$
Ce qui prouve l'existence de $\boxed{M=\pm\sqrt{\lambda}\varphi_{\frac12}(\frac{1}{\lambda})}$ donc de $g$ pour $\lambda>0$.
3b) Pour $\lambda=1$ et $n=2$ il vient $L_n(1/\lambda)=L_2(1)=D_2-\frac12 D_2^2$ puis
$\varphi(1)=I+\frac12 L_2(1)+\frac18 L_2^2(1)=I+\frac12(D_2-\frac12 D_2^2)+\frac18 D_2^2=I+\frac12 D_2-\frac18 D_2^2$
On retrouve bien les matrices $G$ puisque $A_0=D_2$ avec les notations de l'énoncé.

# QUATRIEME PARTIE

1)*Remarque : question de cours pour retrouver le DSE de* $(1+x^\alpha)$
1a) $h$ vérifie sur $]-1,+\infty[$ (mais pas sur $[-1,+\infty[$ ) l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\boxed{(1+x)y'=\tfrac12 y}$$

1b)On cherche alors une solution développable en série entière $\sum_{b=0}^{\infty}b_px^p$ et telle que $b_0=1$ . On vérifie sans problème

$$b_0=1\text{ et }b_p=\frac12(\frac12-1)\cdots(\frac12-p+1)/p!\text{ pour }p\in N^*$$

et que $R = 1$
1c)Par produit de Cauchy de deux séries entières sur le disque ouvert de convergence $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = (h(x))^2 = (1+x)$

$$\boxed{c_0 = c_1 = 1, \forall k > 1\ c_k = 0}$$

2)
2a)Si $P$ est un polynôme de degré $n$ alors $T(P) = \sum_{p=0}^{n} \frac{b^p}{\lambda^p} D^p P + 0$ est bien un polynôme.
En prenant $n = \max(d(P), d(Q))$ on vérifie alors la linéarité de $T = \sum_{p=0}^{n} \frac{b^p}{\lambda^p} D^p$.$T$ est un endomorphisme de $E$.
2b) On peut remarquer que $E_n$ est stable par $T$ .Notons $T_n$ l'endomorphisme induit par $T$ sur $E_n$. On a pour $P \in E_n$ : $T^2(P) = T_n^2(P)$.
Or $T_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{b_p}{\lambda^p} D_n^p$ ce qui conduit, compte tenu de $D_n^k = 0$ pour $k > n$ à
$T_n^2 = \sum_{p=0}^{n} \frac{b_p}{\lambda^p} D_n^p \sum_{q=0}^{n} \frac{b_q}{\lambda^q} D_n^q = \sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k}^{n} \frac{b_p b_q}{\lambda^{p+q}} D_n^{p+q} = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\lambda^k} D_n^k = I + \frac{1}{\lambda} D_n$
Ainsi $T^2(P) = P + \frac{1}{\lambda} DP$ et finalement : $T^2 = Id + \frac{1}{\lambda} D$.
c) $g = \pm\sqrt{\lambda} T$ convient . $(\lambda > 0)$
d)Et $g_n = \pm\sqrt{\lambda} \sum_{p=0}^{n} \frac{b_p}{\lambda^p} D_n^p$.
Dans le cas I-4, $n = 2$ et $\lambda = 1$.
Donc $g_2 = \pm(b_0 I + b_1 D_2 + b_2 D_2^2)$ avec $b_0 = 1, b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = -\frac{1}{8}$ ce qui redonne les matrices précédentes.