BANQUE PT 97 : Math 2B

A:Préliminaire

Méthode à connaître : on introduit $\phi(x,t)=\int_c^t f(x,y)dy$

- $\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,t)=f(x,t)$ comme dérivée de la primitive d'une fonction $f_x : y->f(x,y)$ continue sur I
- de plus cette dérivée est continue sur $I\times[c,d]$
- $\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)=\int_c^t\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$ comme dérivée d'une intégrale à paramètre . La fonction f étant C^1 sur $I\times[c,t]$ et la domination étant inutile car $[0,t]$ est un segment.
- de plus cette dérivée partielle est continue
- Enfin $F(x)=\phi(x,g(x))$ donc $F'(x)=\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,g(x))+g'(x)\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\phi(x))$

$$\boxed{F'(x)=g'(x)f(x,g(x))+\int_c^{g(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy}$$

PARTIE B

Dans tout le problème on supposera $V\neq 0$. Si $V=0$ alors $u=v=0$ sont solutions évidentes. Et on peut supposer que comme tout problème physique la solution est unique . Ici rien n'entraîne le liquide en surface . Donc le liquide ne bouge pas.

B1) On a d'après **(1)** $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=p'(x)$. On peut donc intégrer deux fois

$$u(x,y)=\frac{y^2}{2}p'(x)+yK(x)+C(x),\ K \text{ et } C \text{ étant deux fonctions } C^2 \text{ de } x \text{ seul}$$

soit en tenant compte des conditions aux bornes pour $y=0$ et $y=-h(x)$

$$\boxed{u(x,y)=\frac{y^2}{2}p'(x)+y\left(\frac{V}{h(x)}+\frac{h(x)}{2}p'(x)\right)+V}$$

On peut diviser car pour tout x on a $h(x)>0$.
remarque : aucune possibilité de vérifier cette formule avant d'arriver à la fin des calculs en C3 . encore une fois une question fausse et une moitié de problème infaisable.(même si B3 permet une vérification partielle)
De la relation précédente on déduit

$$p'(x)=2\frac{u(x,y)-yV/h(x)+V}{y^2+yh(x)}$$

Pour x fixé le dénominateur est un trinôme du second degré et donc admet au plus deux racines en y . En ne prenant pas ces valeurs $p'(x)$ est le quotient de deux fonctions C^1 à dénominateur non nul donc $\underline{p(x)\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}$

B2) on a $Q(x)=-\int_0^{-h(x)}u(x,y)dy$. Comme $u\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et $h\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on peut appliquer le préliminaire sur tout segment $[c,d]$ avec $O=\mathbb{R}^2$ ouvert et $I=\mathbb{R}$. Q est donc C^1 sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}$ et

$$Q'(x)=h'(x)u(x,h(x))-\int_0^{-h(x)}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)dy$$

soit avec **(2)** et **(3)**

$$Q'(x)=\int_0^{-h(x)}\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)dy=v(x,-h(x))-v(x,0)=0$$

$$\boxed{Q \text{ est constante sur } \mathbb{R}}$$

B3) En reportant dans Q l'expression de $u(x,y)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
Q(x) &= -\int_0^{-h(x)}\left(\frac{y^2}{2}p'(x)+y\left(\frac{V}{h(x)}+\frac{h(x)}{2}p'(x)\right)+V\right)dy\\
&= \left[\frac{y^3}{6}p'(x)+\frac{y^2}{2}\left(\frac{V}{h(x)}+\frac{h(x)}{2}p'(x)\right)+Vy\right]_{-h(x)}^0\\
&= \frac{h(x)}{2}V-\frac{1}{12}h^3(x)p'(x)
\end{aligned}$$

Soit en dérivant (pas de problème car h est C^1 par hypothèse et p C^2 d'après **B1)** comme $Q'(x)=0$:

$$\boxed{\frac{d(h^3p')}{dx}(x)=6Vh'(x)}$$

sans la remarque de B1 il faut rédiger : $h^3(x)p'(x)=6Vh(x)-12Q(x)$ est une fonction C^1 comme différence de fonctions C^1. et ne surtout jamais écrire p" dans un calcul.

PARTIE C

C1) par périodicité :$\inf_{\mathbb{R}}(h) = \inf_{[0,L]}(h)$ et $\sup_{\mathbb{R}}(h) = \sup_{[0,L]}(h)$. Or l'image du segment $[0, L]$ par la fonction continue h et un segment $[h_0, h_1]$. h atteint donc ses bornes h_0 et h_1 . De plus $\exists x_0 \in [0, L]\,, h_0 = h(x_0) > 0$ car h est à valeur dans $\mathbb{R}^{+*}$

$$\boxed{h \text{ est bornée et atteint ses bornes, } h_0 = \min_{\mathbb{R}}(h) > 0}$$

p est une fonction C^1 sur $[0, L]$ et $p(0) = p(L)$. Donc d'après le théorème de valeurs intermédiaires :

$$\boxed{\exists c \in]0, L[\,, p'(c) = 0}$$

C2) Si on reporte dans l'expression de Q trouvée en **B3**:$Q(x) = \frac{h(x)}{2}V - \frac{1}{12}h^3(x)p'(x)$ et sachant que Q et une fonction constante (que je note q) on a en utilisant l'hypothèse supplémentaire $V \neq 0$:

$$\boxed{p'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = \frac{2q}{V}}$$

les extrema de pressions sont tous à la même distance de la paroi qui entraîne le fluide.
En reportant dans l'expression de **B3** on obtient

$$\frac{h(x)}{2}V - \frac{1}{12}h^3(x)p'(x) = \frac{Vh^*}{2}$$

soit

$$p'(x) = 6V\left(\frac{1}{h^2(x)} - \frac{h^*}{h^3(x)}\right)$$

les fonctions p , $1/h^2, 1/h^3$ sont continues sur le segment $[0, L]$ donc y sont intégrables . De plus $\int_0^L p' = p(L) - P(0) = 0$ par période.
Donc en intégrant $\int_0^L \left(\frac{1}{h^2(x)} - \frac{h^*}{h^3(x)}\right)dx = 0$

$$\boxed{h^* = \frac{\int_0^L 1/h^2}{\int_0^L 1/h^3}}$$

On connaît l'inégalité : $\forall x, h_0 \leq h(x) \leq h_1$. On peut multiplier par $h^2(x)$ positif , prendre l'inverse d'inégalités entre réels positifs et intégrer (les bornes ont dans le bon sens):$h_0 \int_0^L h^2 \leq \int_0^L h^3 \leq h_1 \int_0^L h^2$ donc $\boxed{h_0 \leq h^* \leq h_1}$.
les extrema de pression sont toujours compris "dans les creux du fond ".
Supposons $h^* = h_1$ alors $h_1 \int_0^L 1/h^3 - \int_0^L 1/h^2 = 0$ donc $\int_0^L \frac{h_1 - h(x)}{h^3(x)}dx = 0$. Or h_1 et le maximum de h . On intègre donc une fonction continue positive . Si l'intégrale est nulle , la fonction est nulle :$\forall x \in [0, L]$ $h(x) = L$,Par périodicité le résultat est vrai partout :$\boxed{h^* = h \Rightarrow h \text{ est constante}}$. Idem pour $h^* = h_0$.

C3) On a le système $\begin{cases} u(x,y) = \frac{y^2}{2}p'(x) + y\left(\frac{V}{h(x)} + \frac{h(x)}{2}p'(x)\right) + V \ \textbf{(B1)} \\ p'(x) = 6V\left(\frac{1}{h^2(x)} - \frac{h^*}{h^3(x)}\right) \ \textbf{(C2)} \end{cases}$

On remplace $p'(x)$ par sa valeur dans la première équation . On remarque (en utilisant peut-être la réponse que $\left(1 + \frac{y}{h(x)}\right)$ se factorise et on trouve bien :

$$\boxed{u(x,y) = V\left(3\frac{y}{h(x)}(1 + \frac{y}{h(x)})(1 - \frac{h^*}{h(x)}) + (1 + \frac{y}{h(x)})\right)}$$

D'après l'hypothèse **(2)**

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = Vh'(x)\left(\frac{6y^2}{h^3(x)} - \frac{9y^2h^*}{h^4(x)} + \frac{4y}{h^2(x)} - \frac{6yh^*}{h^3(x)}\right)$$

d'où en intégrant sur le segment $[0, y]$ et en utilisant $v(x, 0) = 0$

$$\boxed{v(x,y) = Vy^2\frac{h'(x)}{h^2(x)}\left(1 + \frac{y}{h(x)}\right)\left(2 - \frac{3h^*}{h(x)}\right)}$$

h étant supposée C^∞ jamais nulle les deux fonctions u et v sont C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et p C^∞ sur $\mathbb{R}$.
remarque : le calcul m'a semblé plus simple en utilisant la forme linéarisée de $u(x,y)$ plutôt que la forme factorisée du début de la question.

PARTIE D

D1)cf figure en notant que $u(x,y)$ est l'abscisse du vecteur vitesse en $M(x,y)$
D2)D'après la formule trouvée en **C3** $u(x,y)$ est une fonction de y qui est un trinôme du second degré admettant $y_0 = -h(x)$ comme racine évidente . L'autre racine est $y_1 = -\frac{h^2(x)}{3(h(x) - h^*(x))}$. On veut que $u(x,y)$ change de signe sur $]-h(x), 0[$ on doit donc avoir $-h(x) < y_1 < 0 \Leftrightarrow h(x) > h^*$ et $h^* < \frac{2}{3}h(x)$ .La seconde inégalité implique $h^* < \frac{2}{3}h_1$

$$\boxed{\frac{h^*}{h_1} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow (\text{ il ne peut pas y avoir de trajectoire fermé})}$$

PARTIE E

E1 $h \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \Leftrightarrow a > b$ pour que le dénominateur ne puise pas avoir de racine.
On veut alors $\left\{\begin{array}{l} h_0 = \frac{1}{a+b} \\ h_1 = \frac{1}{a-b} \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{l} a = \frac{h_1+h_0}{2h_0h_1} \\ b = \frac{h_1-h_0}{2h_0h_1} \end{array}\right.$ qui sont bien positifs avec $a > b$

E2,3 Pour calculer $\int_0^L \left(a + b\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right)^2 dx$ et $\int_0^L \left(a + b\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right)^3 dx$ on linéarise les deux quantités :
$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$, $\cos^3(t) = \frac{\cos(t)+\cos(t)\cos(2t)}{2} = \frac{2\cos(t)+(\cos(3t)+\cos(t))}{4}$

$$\boxed{h^* = \frac{2a^2+b^2}{a(2a^2+3b^2)} = \frac{2h_0h_1}{h_0+h_1} = 2\frac{3+2\alpha+3\alpha^2}{(1+\alpha)(5-2\alpha+5\alpha^2)}}$$

h^* est la moyenne harmonique de h_0 et h_1 .
Comme $h_1 \geq h_0$ on a $\alpha \geq 1$. La question de la limite si α tend vers 0 a aucun sens physique . Si on veut faire des maths théoriques le prolongement par continuité est évident $\lim_0 (h^*) = \frac{6}{5}$
Physiquement c'est plutôt la limite en 1 (si h devient constante) et on trouve $\lim_1 (h^*) = 1$ (cohérent avec $\lim(a) = 1, \lim(b) = 0$)
La limite de h^* en $+\infty$ et nulle.
$\lim_{+\infty}(h^*) = 0$ donc : $\varepsilon > 0$, $\exists A, \alpha \geq A \Rightarrow h^* \leq \varepsilon$
En prenant $\varepsilon < 2/3$ il n'y a pas contradiction avec l'hypothèse d'exitance de trajectoire fermée.