Avant de commencer le sujet on vérifie que l'on a bien compris le sujet en prenant $n = 2$.
le calcul direct dit que si $n = 2$ alors $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ car $M \in O(2)$
Dans le premier cas $f_2(M) = 2\cos(\theta) - \sin(\theta)$ et dans le second $f_2(M) = \sin(\theta)$
$f\prime_1 = -2\sin(\theta) - \cos(\theta)$. f croit sur $[-\pi, -\arctan(1/2)]$ décroît sur $[-\arctan(1/2), \pi - \arctan(1/2)]$ croit sur $[\pi - \arctan(1/2), \pi]$
si $\theta = -\arctan(1/2)$ $\cos(\theta) > 0$ et $\sin(\theta) = -\frac{\cos(\theta)}{2}$, $\sin^2 + \cos^2 =$ donne $\cos(\theta) = 2/\sqrt{5}$, $\sin(\theta) = -1/\sqrt{5}$
si $\theta = \pi$ $f_2(\theta) = -2$
le maximum de f_1 est 1 .
donc $A_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5}) & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ et $f_2(A_2) = \sqrt{5}$.
Mais il est impossible de vérifier sans machine que c'est égal à l'expression proposée III 5 .

Résultats préliminaires

1. Chaque application qui à M associe $m_{i,j}$ est une application coordonnée donc est une forme linéaire . La somme a un nombre fini de terme Par combinaison linéaire de formes linéaires

$$\boxed{f_n \text{ est une forme linéaire.}}$$

Elle est continue parce qu'une application linéaire définie sur un espace vectoriel normé de dimension finie est continue.

2.
   1. Si $M \in O(n)$, les vecteurs colonne de M sont des vecteurs unitaires (pour la norme euclidienne canonique). Leurs coordonnées sont donc en valeur absolue majorées par 1.

   $$\boxed{M \in O(n) \Rightarrow \|M\| \leq 1}$$

   2. L'application $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $A \mapsto A^t A$ est continue. Donc $O(n)$, qui est l'image réciproque d'un singleton , donc d'un fermé $\{I_n\}$ de $M_n(\mathbb{R})$ par ϕ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.

   $$\boxed{O(n) \text{ est un fermé}}$$

3. $O(n)$ est donc un fermé borné dans l'espace vectoriel normé $M_n(\mathbb{R})$de dimension finie. Donc $O(n)$ est compact. f_n étant continue, $f_n(O(n))$ est un compact de $\mathbb{R}$ et admet donc un plus grand élément. Il existe $A_n \in O(n)$ vérifiant $\forall M \in O(n), f_n(M) \leq f_n(A_n)$.

$$\boxed{\exists A_n \in O(n) \ , \forall M \in O(n) \ , \ f_n(M) \leq f_n(A_n)}$$

Partie I

1. On doit montrer que , dans la base orthonormale canonique , les colonnes de B forment une base orthonormale:
   Je note $\langle X, Y\rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et $\|X\|_2$ la norme euclidienne associée ($\| \ \|_2 \neq \| \ \|$)

   - $\forall k$ $\|B_{n,k}\| = 1$:
     - si $k \notin \{i,j\}$ $B_{n,k} = A_{n,k}$ de norme 1 car $A \in O(n)$
     - si $k = i$ $\|B_{n,i}\|_2^2 = (\cos t)^2 \|A_{n,i}\|_2 + (\sin t)^2 \|A_{n,j}\|_2 + 2\sin t \cos t \langle A_{n,i}, A_{n,j}\rangle = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$ (toujours car A_n est orthogonale)
     - si $k = j$ idem
   - $\forall k \neq l$ $\langle B_{n,k} B_{n,l}\rangle = 0$:
     - si $k \notin \{i,j\}$ et si $l \notin \{i,j\}$: $\langle B_{n,k} B_{n,l}\rangle = \langle A_{n,k} A_{n,l}\rangle = 0$
     - si $k = i, l \notin \{i,j\}$: $\langle B_{n,i} B_{n,l}\rangle = (\cos t)\langle A_{n,i} A_{n,l}\rangle + (\sin t)\langle A_{n,j} A_{n,l}\rangle = 0$
     - si $k = i$, $l = j$,

     $$\langle B_{n,k} B_{n,l}\rangle = (\cos t)(\sin t)\left(\|A_{n,i}\|_2^2 - \|A_{n,j}\|_2\right) + \left((\cos t)^2 - (\sin t)^2\right)\langle A_{n,i} A_{n,j}\rangle = (\cos t)(\sin t)(1-1) + 0 = 0$$

     - les autres cas sont identiques au second.

2. soit $A_n = (a_{i,j})$ et $B_n = (b_{i,j})$. On a

$$f_n(A_n) = \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} a_{k,l} \text{ et } f_n(B_n) = \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} b_{k,l}$$

Comme A_n et B_n ont les mêmes colonnes à l'exception des colonnes d'indice i et j, on a donc dans la différence tous les termes se simplifient sauf pour $l = i$ et $l = j$

$$\begin{aligned} f_n(A_n) - f_n(B_n) &= \sum_{k=1}^{i}(a_{k,i} - b_{k,i}) + \sum_{k=1}^{j}(a_{k,j} - b_{k,j}) \\ &= \sum_{k=1}^{i} a_{ki} - ((\cos t)\, a_{ki} - (\sin t)\, a_{kj}) + \sum_{k=1}^{j} a_{kj} - ((\sin t)\, a_{ki} + (\cos t)\, a_{kj}) \\ &= \lambda(1 - \cos(t)) + \mu \sin(t) \end{aligned}$$

où

$$\boxed{\lambda = \sum_{k=1}^{i} a_{ki} + \sum_{k=1}^{j} a_{kj}, \text{ et } \mu = \sum_{k=1}^{i} a_{kj} - \sum_{k=1}^{j} a_{ki}}$$

3. si $\mu \neq 0$: $f_n(A_n) - f_n(B_n) = \mu t + o(t) \sim \mu\tau$ change de signe en $t = 0$

   Or $B_n \in O(n)$, on a donc $\forall\, t$, $f_n(A_n) - f_n(B_n) \geq 0$.

   c'est donc absurde donc $\boxed{\mu = 0}$

   et donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{i} a_{kj} = \sum_{k=1}^{j} a_{ki}}$$

   bien extraire le cas $\mu = 0$ où l'équivalent est faux

PARTIE II

1. **a)** Le calcul de J_n^k est classique: Si f est l'endomorphisme tel que $Mat(f) = J_n$ on a $f(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} \text{ si } i \leq n-1 \\ 0 \text{ si } i = n \end{cases}$

   On en déduit par récurrence que pour $k < n$, $f^k(e_i) = \begin{cases} e_{i+k} \text{ si } i \leq n-k \\ 0 \text{ si } i > n-k \end{cases}$ puis que $f^n = 0$.

   Or si $C = Mat(g)$, $g(e_i) = \sum_{j=i}^{n} e_j = \sum_{k=0}^{n-i} e_{i+j} = \sum_{k=0}^{n-i} f^k(e_i) = \sum_{k=0}^{n-1} f^k(e_i)$ car les termes en plus sont nuls. Donc $g = \sum_{k=0}^{n-1} f^k$ (si l'égalité est vraie sur une base , elle est vrai partout) et donc :

$$\boxed{C_n = \sum_{k=0}^{n-1} J_n^k}$$

   à mon avis plus facile à rédiger pour les endomorphismes que pour les matrices

   b)On a donc $(I_n - J_n)C_n = (I_n - J_n)\sum_{k=0}^{n-1} J_n^k = I_n - J_n^n = I_n$. <u>Donc C_n est inversible d'inverse $I_n - J_n$.</u>

2. **a)** Soit $U = (u_{i;j}) = C_n M$, on a $\forall (i,j)$ $u_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k} m_{k,j} = \sum_{k=1}^{i} m_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} 0$

   $Tr(C_n M) = \sum_{i=1}^{n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} m_{k,i} = \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} m_{k,j} = f_n(M)$.

   b) Si maintenant $U = C_n A_n$, le calcul précédent donne $u_{ij} = \sum_{k=1}^{i} a_{k,j} = \sigma_{ij}$.

   Donc, d'après I.3 comme $\sum_{k=1}^{i} a_{k,j} = \sum_{k=1}^{j} a_{k,i}$ on a $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$ et $\boxed{C_n A_n \text{ est une matrice symétrique}}$

3. **a)**On a ${}^tU_n = {}^tA_n C_n^{-1}$

   On a donc

$$\begin{aligned} {}^tU_n &= U_n \Leftrightarrow {}^tA_n C_n^{-1} = {}^tC_n^{-1} A_n \Leftrightarrow C_n\, {}^tA_n^{-1} = A_n^{-1}\, {}^tC_n \text{ en prenant l'inverse des deux membres} \\ &\Leftrightarrow C_n A_n = {}^tA_n\, {}^tC_n \text{ car } A_n \text{ est orthogonale donc } {}^tA_n = A_n^{-1} \\ &\Leftrightarrow C_n A_n = {}^t(C_n A_n) \text{ relation vérifiée d'après la question 2} \end{aligned}$$

   il faut partir de la question et réussir à faire apparaître $C_n A_n$

   b)

$$\begin{aligned} f_n(A_n) &= Tr(C_n A_n) = Tr({}^t(C_n A_n)) \text{ car } Tr({}^tM) = Tr(M) \\ &= Tr({}^tA_n {}^tC_n) = Tr(A_n^{-1}\, {}^tC_n) \text{ car } A \in O(n) \\ &= Tr(U_n^{-1}). \end{aligned}$$

   plus facile à trouver au brouillon en partant de $Tr(U_n^{-1})$

4.

$$\begin{array}{rcl} U_n^2 & = & U_n\,{}^tU_n \text{ car } U_n \text{ est symétrique} \\ & = & {}^tC_n{}^{-1}A_n\,{}^tA_nC_n^{-1} = {}^tC_n{}^{-1}C_n^{-1} \text{ car } A_n \in O(n) \\ & = & (I_n -{}^t J_n)(I_n - J_n) \text{ d'après la calcul de } C_n^{-1} \\ & = & I_n - J_n -{}^t J_n + {}^tJ_nJ_n, \end{array}$$

reste à calculer $W = {}^tJ_nJ_n$: $w_{i,k} = \sum_{l=1}^{n} j_{l,i}j_{l,k}$

- si $i \neq k$ pour tout l $l \neq i+1$ ou $l \neq k+1$ donc $w_{k,l} = \sum 0 = 0$
- si $i = k < n$, il y a un seul terme non nul pour $l = i+1 = k+1$ $w_{i,i} = 1$
- si $i = k = n$, tous les termes sont nuls $w_{i,j} = 0$

$$\boxed{V_n \text{ est du type indiqué}}$$

PARTIE III

1. La matrice $V_n - \lambda I_n$ étant tridiagonale , la relation s'obtient classiquement en développant la matrice par rapport à une ligne (colonne).

   Si on barre la dernière ligne et colonne la matrice obtenue n'est plus du type initial. Si on barre la première c'est bon.

   On développe V_n par rapport à la première ligne

$$\det(V_n - \lambda I_n) = (2-\lambda)\det(V_{n-1} - \lambda I_{n-1}) + \det(W_n)$$

avec $W_n = \begin{pmatrix} -1 & ?? \\ (0) & V_{n-2} - \lambda I_{n-2} \end{pmatrix}$ de déterminant $-det(V_{n-2} - \lambda I_{n-2})$

$$\det(V_n - \lambda I_n) = (2-\lambda)\det(V_{n-1} - \lambda I_{n-1}) - \det(V_{n-2} - \lambda I_{n-2})$$

$$\boxed{P_n = (2-X)P_{n-1} - P_{n-2}}$$

2. Pour que la formule $P_n(x) = \frac{\cos((2n+1)\theta)}{\cos(\theta)}$ soit valide :on doit supposer $\cos(\theta) \neq 0$ soit $\theta \neq \pi/2$ $[\pi]$

   méthode 1 : résoudre la suite récurrente:

$$P_n = 2\cos(2\theta)P_{n-1} - P_{n-2}$$

On peut utiliser l'équation caractéristique : $r^2 - 2\cos(2\theta)r + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = -4\sin^2(2\theta)$, de racines $e^{\pm 2i\theta}$ d'où la forme générale des solutions $\lambda e^{2in\theta} + \mu e^{-2in\theta}$. Les conditions pour $n = 0$ et $n = 1$ donnent le système $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda e^{2i\theta} + \mu e^{-2i\theta} = 1 - 4\sin^2(\theta) = -1 + 2\cos(2\theta) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \lambda = \frac{e^{2i\theta}-1}{2i\sin(2\theta)} \\ \mu = -\frac{e^{-2i\theta}-1}{2i\sin(2\theta)} \end{cases}$

$$P_n = \frac{(e^{2i\theta}-1)e^{2in\theta} - (e^{-2i\theta}-1)e^{-2in\theta}}{2i\sin(2\theta)} = \frac{\sin((2n+2)\theta) - \sin((2n\theta)}{\sin(2\theta)} = \frac{2\sin(\theta)\cos((2n+1)\theta)}{2\sin(\theta)\cos(\theta)}$$

en traitant le cas particulier $\theta = 0[\pi]$

méthode 2 : **Le sujet proposant la réponse on fait une vérification par récurrence.**

comme $2 - x = 2 - 4\sin^2(\theta) = 2\cos(2\theta)$ on a l'équation : $P_n = 2\cos(2\theta)P_{n-1} - P_{n-2}$

- pour $n = 0$: $1 = \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)}$
- pour $n = 1$, on a : $P_n(x) = 1 - x = 1 - 4\sin^2(\theta)$ et

$$\begin{array}{rcl} \cos(3\theta) & = & \cos(2\theta+\theta) = \cos(2\theta)\cos\theta - \sin(2\theta)\sin\theta \\ & = & \left(2\cos^2\theta - 1\right)\cos\theta - 2\cos\theta\sin^2\theta \\ & = & \left(2\cos^2\theta - 1\right)\cos\theta - 2\cos\theta)(1-\cos^2\theta) \\ & = & 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \end{array}$$

  et donc $\frac{\cos(3\theta)}{\cos(\theta)} = 4\cos^2\theta - 3 = 4\left(1 - \sin^2\theta\right) - 3 = 1 - 4\sin\theta^2$

- pour $n \geq 2$, et si cette formule est valide pour $n-1$ et $n-2$ (récurrence double) on a :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 2\cos(2\theta)\frac{\cos((2n-1)\theta)}{\cos\theta} - \frac{\cos((2n-3)\theta)}{\cos(\theta)} \\ &= \frac{2\cos(2\theta)\cos((2n-1)\theta) - \cos(2n-3)\theta}{\cos(\theta)} = \frac{\cos((2n+1)\theta)}{\cos(\theta)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\theta \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]\ ,\ P_n(4\sin(\theta)^2) = \frac{\cos((2n+1)\theta)}{\cos(\theta)}}$$

3. si $x = 4\sin^2(\theta)$ on a $P_n(x) = 0 \Leftrightarrow \cos((2n+1)\theta) = 0$ et $\cos(\theta) \neq 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi/2+k\pi}{2n+1}$, $k \neq n[2n+1]$ et alors $x = 4\sin^2(\theta)$. pour que $\sin^2$ décrive $[0,1]$ il suffit de prendre $\theta \in [0, \pi/2]$:

   On se limite à $k \in [0, n-1]$ et on pose $\theta_k = \frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{2n+1}$ et $x_k = 4\sin^2(\theta_k)$. Les (θ_k) sont deux à deux distincts sur $[0, \pi/2]$ donc les (x_k) sont deux à deux distincts (injectivité de sin)

   P_n est un polynôme de degré n et on a trouvé n racines deux à deux distinctes donc on les a toutes trouvées et elles sont simples.

   ne pas oublié de conclure sur le degré le calcul ne donne que les racines sur [0,4] il peut en exister d'autres à priori.

   Ces racines sont les valeurs propres de $V_n = U_n^2$.

   Soit μ une valeur propre de U_n^{-1} , il existe donc un vecteur X non nul tel que $U_n^{-1}X = \mu X$, donc $X = \mu U_n X$ et donc comme $\mu \neq 0$ (une matrice inversible n'a pas la valeur propre 0) $U_n X = \mu^{-1}X$. eu donc $V_n X = U_n^2 X = \mu^{-2}X$ donc μ^{-2} est valeur propre de V_n

   $$\boxed{\mu \in Sp(U_n^{-1}) \Rightarrow \exists k \in [0, n-1]\ ,\ \mu = \pm\frac{1}{2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{2n+1}\right)}}$$

4. **1)** On sait que U_n, donc U_n^{-1}, est symétrique réelle. Donc U_n est diagonalisable dans une base orthonormale : c'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telle que $\boxed{U_n^{-1} = PD\,{}^tP}$.

   2) la formule proposé définit bien une unique matrice A'_n car C_n est inversible.

   i) Comme D est inversible, l'un au moins des d_k est strictement négatif. Et l'on a : $tr(C_nA') = tr(PD'P^{-1}) = \sum_{k=1}^n |d_k| > \sum_{k=1}^n d_k = tr(C_nA_n)$.

   ii) $A'\,{}^tA' = \left(C_n^{-1}PD'\,{}^tP\right)\left(PD'\,{}^tP\,{}^tC_n^{-1}\right) = C_n^{-1}PD'^2\,{}^tP\,{}^tC_n^{-1} = C_n^{-1}PD^2\ {}^tP{}^tC_n^{-1} = A^tA = I_n$

   iii) C'est une contradiction puisque A' orthogonale entraîne $tr(C_nA') = f_n(A') \leq f_n(A_n) = tr(C_nA)$.

   $\boxed{\text{On peut donc conclure que les } d_k \text{ sont tous strictement positifs}}$

5. On a donc $\mu \in Sp(U_n^{-1}) \Rightarrow \exists k \in [0, n]\ \mu = \frac{1}{\sin\left(\frac{2k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right)}$.

   pour prouver que toutes les valeurs sont obtenues il reste à montrer que U_n^{-1} n'a pas de valeur propre double.

   mais si μ est une valeur propre d'ordre ≥ 2 , alors comme la matrice est diagonalisable le sous espace propre est de dimension ≥ 2 .Il existe donc deux vecteurs propres non colinéaires. Le calcul du 3 montre qu'alors ces deux vecteurs propres sont des vecteurs propres de V_n pour la même valeur propre $1/\mu^2$, V_n admet un sous espace propre de dimension ≥ 2 . Absurde car les valeurs propres sont simples.

   Puisque les valeurs propres de U_n^{-1} sont deux à deux distinctes, ce sont exactement les $\frac{1}{\sqrt{x_k}} = \frac{1}{2\sin(\theta_k)}$.

   On a donc

   $$f_n(A_n) = tr(U_n^{-1}) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\sin(\theta_k)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sin\left(\frac{2k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right)}$$

   $$\boxed{f_n(A_n) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sin\left(\frac{2k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right)}}$$

PARTIE IV

1. traduction évidente

2. La fonction ϕ, que l'on définit sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, est décroissante. Donc par encadrement (l'intervalle étant de longueur $2h$):

   $$\text{pour } h \geq 1 :\ 2h\phi((2k+1)h) \leq \int_{(2k-1)h}^{(2k+1)h}\phi(t)dt \leq 2h\phi((2k-1)h)$$

   et donc

   $$\int_{(2k+1)h}^{(2k+3)h}\phi(t)dt \leq 2h\phi((2k+1)h) \leq \int_{(2k-1))h}^{(2k+1)h}\phi(t)dt$$

on fait la somme de $k=0$ à $k=n-1$

$$\int_h^{(2n+1)h} \phi(t)dt \leq 2h\sum_{k=0}^{n-1} \phi\left((2k+1)h\right)$$

puis on fait la somme de 1 à $n-1$

$$2h\sum_{k=0}^{n-1} \phi\left((2k+1)h\right) = 2h\phi(h) + \sum_{k=1}^{n-1} \phi\left((2k+1)h\right) \leq 2h\phi(h) + \int_h^{(2n-1)h} \phi(t)dt$$

attention à ne pas intégrer sur un intervalle contenant 0.

$$\boxed{\int_h^{(2n+1)h} \phi(t)dt \leq 4hf_n(A_n) \leq 2h\phi(h) + \int_h^{(2n-1)h} \phi(t)dt}$$

3. On a $\phi(t) = \frac{1}{\sin(t)} = \frac{1}{t-t^3/6+o(t^3)} = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1-t^2/6+o(t^2)}\right) = \frac{1}{t}\left(1+t^2/6+o(t^2)\right) = \frac{1}{t} + t/6 + o(t)$

   On a donc $\phi(t) - \frac{1}{t}$ qui est une fonction $g(t)$ continue (après prolongement) sur $[0,1]$ donc intégrable sur ce segment

   On a donc $\int_h^{\pi/2} \phi(t)dt = -\ln(h) + \ln(\pi/2) + \int_0^{\pi/2} g(t)dt = \ln(h) + O(1)$

$$\boxed{\int_h^{\pi/2} \phi(t)dt \sim_{h->0} -\ln(h)}$$

   Donc $\int_h^{\pi/2} \phi(t)\ dt \sim_{h\to 0} -\ln(h)$.

4. Des inégalités démontrées en 2 , on déduit :

$$0 \leq 4hf_n(A_n) - \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin(t)} \leq 2h\phi(h)$$

   Or, quand $n \to +\infty$, $h\phi(h) \to 1$. Donc $4hf_n(A_n) - \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin(t)}$ est une suite bornée : $4hf_n(A_n) = \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin(t)} + O(1) = -\ln(h) + O(1) \sim -\ln(h)$ et donc $f_n(A_n) \sim_{h->0} -\frac{\ln(h)}{4h}$

   or $h = \frac{\pi}{4n} + o(1/n)$ et donc $\ln(h) = \ln(\frac{\pi}{4n}(1+o(1)) = \ln(\pi/4) - \ln(n) + \ln(1+o(1)) = -\ln(n) + \ln(\pi/4) + o(1) \sim -\ln(n)$

$$\boxed{f_n(A_n) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi} n\ln(n)}$$