E3A 2001 PC
Sujet 1 exercice

Soit $M = \sup\left(|a_n|, n \in \mathbb{N}^*\right)$
On remarquera que R_k est le reste d'ordre $k-1$ de la série.
La suite est à valeur complexes , pas question d'utilisé des inégalités sur les a_n mais seulement sur leurs modules.

1. Pour prouver la convergence de la série on passe par la convergence absolue :

$$\left|\frac{a_n}{n\,(n+1)}\right| \leq \frac{M}{n^2} \text{ et } \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge car } 2 > 1$$

2. On décompose en éléments simples la fraction :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

d'où la simplification :

$$\sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n} - \sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n} - \sum_{n=p+1}^{q+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q+1}$$

On en déduit

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \longrightarrow_{N->+\infty} 1$$

soit

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1}$$

3.

- Pour $|x| < 1$, la série $\sum \frac{x^n}{n(n+1)}$ converge par majoration par la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$
pour $|x| > 1$ la série diverge grossièrement .

$$\boxed{R = 1}$$

- pour $|x| < 1$ on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

les deux séries entières introduites étant aussi de rayon de convergence 1.
Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

et pour $x \neq 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x\right) = \frac{-\ln(1-x) - x}{x}$$

d'où pour $x \neq 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{\ln(1-x) + x}{x} - \ln(1-x) = \frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x}$$

pour $x = 0$ les deux expressions sont nulles

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[\,:\, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x}}$$

- Sur $[-1, 1]$ on a

$$\left|\frac{x^n}{n(n+1)}\right| \leq \frac{1}{n^2} \left\{ \begin{array}{c} \text{série indépendante de } x \\ \sum 1/n^2 \text{ converge} \end{array} \right.$$

la série converge donc normalement sur $[-1, 1]$. La fonction $x- > \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ est donc continue sur ce segment.
Si x tend vers 1 on retrouve $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (ce qui donne une vérification de la somme de la série)
Si x tend vers -1 on trouve

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = 1 - 2\ln(2)}$$

4. En utilisant le calcul de la question 2 on a : $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{k}$ et donc

$$|kR_k| \leq \frac{M}{k} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \leq M$$

5.

- Par majorations on a :

$$\begin{aligned} |R_k| &\leq \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n(n+1)} \leq \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{|a_n|}{k(k+1)} \text{ car } n \geq k \\ &\leq \frac{1}{k(k+1)} \sum_{n=k}^{+\infty} |a_n| \leq \frac{1}{k^2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \end{aligned}$$

d'où la convergence de la série $\sum_k |R_k|$ par majoration du terme général par celui d'une série convergente.

- On a

$$\sum_{k=1}^{N} k \sum_{n=k}^{N} \frac{a_n}{n(n+1)} = \sum_{1 \leq k \leq n \leq N} k \frac{a_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k$$

- Or $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ d'où

$$\sum_{k=1}^{N} k \sum_{n=k}^{N} \frac{a_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n(n+1)} . \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} a_n$$

- On remarque que l'expression $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}$ est indépendante de k et peut donc être factoriser. La relation $\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$ donne alors la relation voulue

$$\sum_{k=1}^{N} k \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{N(N+1)}{n(n+1)} a_n$$

- Si $\Sigma_N = \sum_{k=1}^{N} kR_k$ est la somme partielle de la série $\sum kR_k$ On a

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{k=1}^{N} k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{N} k \sum_{n=k}^{N} \frac{a_n}{n(n+1)} + \sum_{k=1}^{N} k \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} a_n + \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{N(N+1)}{n(n+1)} a_n \end{aligned}$$

La première somme tend si N tend vers $+\infty$ vers $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$
La seconde tend vers 0 si n tend vers $+\infty$: En effet

$$\frac{N(N+1)}{n(n+1)} \leq 1$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{N(N+1)}{n(n+1)} a_n \right| &\leq \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{N(N+1)}{n(n+1)} |a_n| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \end{aligned}$$

La série $\sum a_n$ étant absolument convergente la série reste $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|$ tend vers 0 et donc aussi $\frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{N(N+1)}{n(n+1)} a_n$
Par somme de deux suites convergentes la suite Σ_n converge et donc aussi la série $\sum kR_k$ et par passage à la limite

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} kR_k = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n}$$