Le sujet est constitué de <u>deux problèmes indépendants</u> que le candidat pourra traiter dans un ordre indifférent.

PROBLÈME 1

1. On considère dans cette question la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier $n\geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)} = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{2k}\right)$$

(a) On pose, pour tout entier naturel $n\geq 1$, $v_n = \sqrt{n}\, u_n$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

(b) Étudier la nature de la série de terme général $w_n = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note L sa limite.
Comparer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les réels u_n et $\frac{L}{\sqrt{n}}$.

2. On considère dans cette question la fonction $\varphi : x \longmapsto \varphi(x) = \sqrt{1-x}$ pour $x \in [0, 1]$.

(a) Déterminer la dérivée d'ordre n de $\varphi : x \longmapsto \varphi^{(n)}(x)$ pour $x \in [0, 1[$.

(b) Soit $x \in [0, 1[$. La formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à φ sur $[0, x]$ s'exprime sous la forme $\varphi(x) = P_n(x) + R_n(x)$ où P_n est une fonction polynomiale de degré n et

$$R_n(x) = \frac{1}{n\,!}\int_0^x (x-t)^n \varphi^{(n+1)}\, dt$$

Exprimer les coefficients de P_n en fonction de n. Donner la valeur de P_4.

(b) Démontrer la majoration

$$\forall\, x \in [0, 1[,\ \left|R_n(x)\right| \leq \frac{1}{2}\, u_n \int_0^x (1-t)^{-1/2}\, dt$$

On pourra remarquer que $x - t \leq 1 - t$.
En déduire que

$$\forall\, x \in [0, 1[,\ \left|R_n(x)\right| \leq u_n$$

(c) Démontrer que la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction φ.

Dans la question suivante, on note Q_n le polynôme tel que $Q_n(x) = P_n(1-x^2)$

(d) Soit ε un réel strictement positif et M une constante strictement positive.
Démontrer que si l'entier naturel N vérifie : $N \geq \frac{L^2M^2}{\varepsilon^2}$, alors

$$\forall\, x \in [-1, 1],\ \left|\,|x| - Q_N(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

3. **On considère dans toute la suite du problème 1 une fonction f continue sur** $[0, 1]$ **et** ε **un réel strictement positif.**

On admet qu'il existe un entier naturel $n \geq 2$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1],\ |x - y| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Dans la suite du problème 1, n désigne l'entier ainsi défini.

(a) Soit g la fonction telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n,\ g\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et g est affine sur chacun des intervalles $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $0 \leq k \leq n - 1$

Déterminer l'expression de $g(x)$ lorsque $\dfrac{k}{n} \leq x \leq \dfrac{k+1}{n}$.

(b) Démontrer que $\forall\, x \in [0, 1]$, $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$. On pourra remarquer que l'on peut écrire $g(x)$ sous la forme $g(x) = \alpha f\left(\dfrac{k}{n}\right) + (1 - \alpha) f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$

3. Dans cette question, on considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, les matrices $A_{n+1} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$:

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 2 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & 2 \\ \vdots & & & 1 & 0 & 1 \\ n & \dots & \dots & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{de terme général } (a_{i,j} = |i - j|)_{1 \leq i, j \leq n+1}$$

et $B_{n+1} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ de terme général : $\begin{cases} b_{i,i} = -1 \text{ si } i \neq 1 \text{ et } i \neq n+1 \\ b_{1,1} = b_{n+1,n+1} = \dfrac{1-n}{2n} \\ \text{si } |i - j| = 1 \text{ alors } b_{i,j} = \dfrac{1}{2} \\ b_{1,n+1} = b_{n+1,1} = \dfrac{1}{2n} \\ b_{i,j} = 0 \text{ dans tous les autres cas} \end{cases}$

On admettra que A_{n+1} est inversible et que $A_{n+1}^{-1} = B_{n+1}$: ce résultat est démontré en partie à la question 6.

(a) Soit E_{n+1} l'espace vectoriel des fonctions g définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que g soit affine sur chacun des intervalles $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $0 \leq k \leq n - 1$.

Soit d'autre part Φ l'application de E_{n+1} dans $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que

$$\forall\, g \in E_{n+1},\ \Phi(g) = \left(g\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{0 \leq k \leq n}$$

Démontrer que Φ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et expliciter l'unique fonction $g_\alpha \in E_{n+1}$ telle que $\Phi(g) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ où $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(b) Pour tout entier j, $0 \leq j \leq n$, on note $f_i \in E_{n+1}$ l'application

$$t \longmapsto f_j(t) = \left| t - \frac{j}{n} \right|$$

Montrer que la famille $(f_j)_{0 \leq j \leq n}$ est une base de E_{n+1} : on pourra par exemple expliciter la matrice de la famille des vecteurs $(\Phi(f_j))_{0 \leq j \leq n}$, dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(c) Soit $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $g_\alpha \in E_{n+1}$ la fonction définie à la question 4°a), telle que $\forall\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $g_\alpha\left(\frac{k}{n}\right) = a_k$.

Démontrer qu'il existe n+1 réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\forall\, x \in [0, 1],\ g_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x)$$

Déterminer la valeur des coefficients λ_k, $0 \leq k \leq n$ en fonction de $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

4. La lettre g désigne dans cette question la fonction étudiée à la question 3°a) et Q_N le polynôme obtenu à la question 2°e) pour la valeur $\varepsilon > 0$ et la valeur $M = \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k|$.

(a) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $g = g_\alpha$.
En déduire à l'aide de f la valeur des coefficients λ_k, $1 \leq k \leq n-1$, obtenus à la question 4°c).

(b) On pose

$$\forall\, x \in [0, 1],\ R(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k Q_N\left(x - \frac{k}{n}\right)$$

Démontrer que

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - R(x)| \leq 2\varepsilon$$

(c) Quel théorème vient-on ainsi de démontrer ?

5. On revient sur la matrice A_{n+1} étudiée à la question 4.
Calculer $\det(A_{n+1})$ en fonction de n : on effectuera les opérations suivantes :
pour i allant de n+1 à 2 remplacer la ligne L_i par la ligne $L_i - L_{i-1}$
pour j allant de 2 à n+1 remplacer la colonne C_j par la colonne $C_j + C_1$.
En déduire que A_{n+1} est inversible.

L'usage de calculatrices est interdit

Exercice 1

R désigne l'ensemble des nombres réels et n est un entier naturel non nul.
Dans tout l'exercice, (a_n) est une suite d'éléments non nuls de **R**. On lui associe la suite (p_n) définie par : $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$. Lorsque (p_n) converge, on note p sa limite.
Lorsque (p_n) diverge vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$), on dit que (p_n) admet $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) pour limite.

Première partie

1° Donner un exemple de suite (a_n), telle que (p_n) converge vers $p = 0$.
2° Prouver que, si (p_n) converge vers p différent de 0, alors (a_n) converge vers 1.
3° On suppose dans cette question qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$a_n > 0 \text{ , pour } n > n_0 .$$

On pose, pour n supérieur à n_0, $q_n = \prod_{k=n_0+1}^{n} a_k$.

a) Pour n supérieur à n_0, exprimer q_n en fonction de p_n et de p_{n_0}.
b) Montrer que, si la série $\sum \ln(a_n)$ converge, alors la suite (p_n) converge et que p est non nul.
c) On suppose que la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln(a_n)$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Préciser dans chacun de ces deux cas la limite de la suite (p_n).

Dans ce qui suit, on définit u_n par : $a_n = 1 + u_n$.

Tournez la page S.V.P.

4° On suppose dans cette question que, pour tout n, on a : $u_n \geq 0$.

Démontrer que la suite (p_n) converge vers $p > 0$ si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

5° On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ converge.

a) Montrer que, si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.

b) Montrer que, si la série $\sum u_n^2$ diverge, alors la suite (p_n) converge et $p = 0$.

6° Prouver que, si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.

Deuxième partie

Les quatre questions qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre. On pourra les traiter en utilisant les résultats établis dans la première partie, à condition de s'y référer de manière très précise.

1° Etudier la convergence et déterminer la limite de (p_n) dans les deux cas suivants :

a) $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

b) $a_n = 1 + (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

2° On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On pose : $a_n = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^n e^{-t^2}\, dt$. La suite (p_n) est-elle convergente ?

3° Soit (u_n) une suite de nombres réels vérifiant : $1 + u_n \neq 0$ pour $n \geq 1$. On pose :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + u_k) \quad , \quad v_n = \frac{u_n}{p_n} \, .$$

a) Pour $n > 1$, exprimer v_n en fonction de $\dfrac{1}{p_n}$ et de $\dfrac{1}{p_{n-1}}$.

b) On suppose dans cette question que la série $\sum u_n^2$ converge.

i) Etablir que la convergence de la série $\sum u_n$ implique la convergence de la série $\sum v_n$.

ii) La convergence de la série $\sum v_n$ implique-t-elle la convergence de la série $\sum u_n$? Justifier.

c) Déterminer une suite (u_n) telle que la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge.

4° Soit α un réel strictement positif, et $a_n = 1 + \sin\left(\frac{c}{n^\alpha}\right)$ où c est un nombre réel tel que pour tout n, a_n soit non nul.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α et c pour que (p_n) converge vers 0.

b) On suppose que : $\alpha = 1$

Etudier la convergence de la série $\sum p_n$.

[On pourra utiliser la convergence vers un réel noté γ de la suite (t_n) où $t_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$].

Exercice 2