E3A MP 2002 Math 3

Je note $(E_{i,j})_{i\in[[1,n]],j\in[[1,n]]}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie 0. Un exemple.

Si M est une matrice je note $M_{i,j}$ le coefficient de M ligne i colonne j .

M a pour terme général $M_{i,j} = i\,\delta_{i,j} = \left\{\begin{array}{l} i \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i\neq j \end{array}\right.$. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de terme général $A_{i,j}$. On cherche à résoudre $AM = MA$

On fait le produit des deux matrices :

$$\forall (i,k) \in [\![1;n]\!]^2 \ ,\ (AM)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}M_{k,j} = \sum_{k\neq j} 0 + jA_{i,j}$$
$$\forall (i,k) \in [\![1;n]\!]^2 \ ,\ (MA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} M_{i,k}A_{k,j} = \sum_{k\neq i} 0 + iA_{i,j}$$

Donc $AM = MA \Longleftrightarrow \forall (i,j)\in[[1,n]]^2\ ,\ iA_{i,j} = jA_{ij}$. Si $i=j$ $A_{i,j}$ est indéterminé si $i\neq j$ $A_{i,j}=0$

$A\in\mathcal{C}(M) \iff \exists\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^n \ /\ A = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,E_{i,i}$.

Une base de $\mathcal{C}(M)$ est donc : $(E_{1,1},E_{2,2},\ldots,E_{n,n})$, donc $\boxed{\dim\mathcal{C}(M)=n}$

Partie I. Commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

1 . On doit vérifier que $u\circ v = v\circ u \Rightarrow v\left(E_{\lambda_i}(u)\right)\subset E_{\lambda_i}(u)$

Soit donc $x\in E_{\lambda_i}(u)$ on a $u\left(v(x)\right) = (u\circ v)(x) = (v\circ u)(x) = v\left(u(x)\right) = v\left(\lambda_i x\right) = \lambda_i v(x)$ donc $v(x)\in E_{\lambda_i}(u)$

On a bien vérifié : $\boxed{v(x)\in E_{\lambda_i}(u)}$

Donc tous les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont stables par v.

2 . On sait d'autre part que chaque $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par u, ce qui autorise à considérer l'endomorphisme u_i induit par u sur $E_{\lambda_i}(u)$. Pour $x\in E_{\lambda_i}(u)$ on a : $u_i(x) = u(x) = \lambda_i x$

$$\boxed{u_i \text{ est l'homothétie de rapport } \lambda_i}$$

3 .

- <u>Si $v\in\mathcal{C}(u)$</u>, comme chaque $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v, on sait que dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E=\oplus E_{\lambda_i}(u)$ la matrice $V = Mat(v,\mathcal{B})$ est diagonale par blocs de la forme

  $V = \begin{pmatrix} V_1 & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & V_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & V_p \end{pmatrix}$ avec $V_i\in\mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$.

- <u>Réciproquement</u>, supposons que dans cette base $\mathcal{B}$ $V = Mat(v,\mathcal{B})$ soit de la forme $V = \begin{pmatrix} V_1 & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & V_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & V_p \end{pmatrix}$ avec $V_i\in\mathcal{M}_{n_i}(\mathbf{C})$.

  la base étant une base de vecteurs propres de u, alors $U = Mat(u,\mathcal{B})$ est diagonale et on peut la décomposer en blocs sous la forme $U = \begin{pmatrix} U_1 & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & U_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & U_p \end{pmatrix}$ avec U_i la matrice de u_i donc $U_i = \lambda_i.I_{n_i}$.

  Les produits VU et UV sont diagonales par blocs et les termes diagonaux sont égaux : $\forall\, i\in[\![1;p]\!],\ U_i\,V_i = (\lambda_i.I_{n_i})\,V_i = V_i\,(\lambda_i.I_{n_i}) = V_iU_i$.

  On a donc $VU = UV$, donc $u\circ v = v\circ u$, d'où $v\in\mathcal{C}(u)$.

4 . On peut écrire

$$B=\begin{pmatrix} V_1 & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & V_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & V_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V_1 & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & (0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & (0) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} (0) & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & V_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & (0) \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} (0) & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & (0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & V_p \end{pmatrix}$$

la première matrice est combinaison linéaire des n_i^2 matrices de base $(E_{i,j})_{i\in[[1,n_1]],j\in[[1,n_1]]}$. De même pour les suivantes . $\{B, UB=BU\}$ est donc un sous espace vectoriel engendré par $\sum_{i=1}^p (n_i)^2$ matrices provenant d'une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. donc cet espace vectoriel est de dimension $\sum_{i=1}^p (n_i)^2$
Par l'isomorphisme entre application linéaire et matrice dans une base , on obtient que $\mathcal{C}(v)$ a la même dimension que ce sous-espace vectoriel . Donc

$$\boxed{\dim \mathcal{C}(u) = \sum_{i=1}^p (n_i)^2}$$

5 . Pour $x\geq 1$ on sait que $x^2\geq x$ donc $\dim \mathcal{C}(u)\geq \sum_{i=1}^p n_i$
u étant diagonalisable, $\sum n_i = n$ car E est la somme directe des sous espaces propres .

$$\boxed{\dim \mathcal{C}(u) > n}$$

6 . Il suffit de prendre l'endomorphisme ϕ ayant dans une base de E la matrice M du préliminaire.

Partie II. Commutant d'un endomorphisme nilpotent d'indice 2.

1 . On doit montrer : $\forall x\in E$, $u(x)\in Ker(u)$, c'est à dire $u(u(x))=\overrightarrow{0}$. Conséquence immédiate de $u^2=0$

$$\boxed{\operatorname{Im} u \subset \ker u}$$

Donc rg $u=\dim(\operatorname{Im} u)\leq \dim(\ker u)=n-$ rg u (théorème du rang) , donc 2 rg $u\leq n$, d'où $\boxed{r\leq \frac{n}{2}}$

2 . On a $\dim(G)=n-\dim(\ker u)=r$ (théorème du rang) .On peut donc prendre une base de G de cardinal r. De plus $(u(e_i'))$ est une famille de r vecteurs de Im u , espace vectoriel de dimension r . C'est une base si et seulement si elle est libre. Or

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i u(e_i'))=0 \Rightarrow u\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i^{'}\right)=0$$

$\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i^{'}$ est donc à la fois un vecteur de $\ker u$ et un vecteur de G supplémentaire de $\ker u$. Donc $\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i^{'}=0$. Comme (e_i') est une base : $\forall i\in[[1,r]]\ \lambda_i=0$.

$$\boxed{(u(e_i'))\text{ est une base de }\operatorname{Im} u}$$

Remarque : on peut aussi montrer que la famille est génératrice.
3 . $E=\ker u\oplus G=\operatorname{Im} u\oplus H\oplus G$. On a $\dim(\operatorname{Im} u)=\dim G=r$ et donc $\dim H=n-2r$ que l'on note s.
Pour trouver la base on lit la matrice du sujet : les $r+s$ premières colonnes sont nulles . donc les $r+s$ premiers vecteurs de base sont dans le noyau. Puis l'image du $r+s+k$ ème vecteur de base est le k ème vecteur de base.
On prend donc comme derniers vecteurs de base les (e_i') et comme premier vecteurs de base les $(u(e_i'))$; reste à compléter "au milieu" en une base du noyau: $\mathcal{B}'=(u(e_1'),\dots,u(e_r'),e"_1,e"_2\cdots e"_s,e_1',\dots,e_r')$ avec $(e_i')_{i=1}^r$ base de G et $(e"_j)_{j=1}^s$ base de H .
On a construit une base de E adaptée à la somme directe $E=$ Im $u\oplus H\oplus G$ telle que $Mat(u,\mathcal{B}')=\begin{pmatrix}(0)_r & (0)_{r,s} & I_r\\ (0)_{s,r} & (0)_s & (0)_{s,r}\\ (0)_r & (0)_{s,r} & (0)_r\end{pmatrix}$ notée U.

4 . $v\in\mathcal{C}(u) \iff \begin{pmatrix}(0)&(0)&I\\(0)&(0)&(0)\\(0)&(0)&(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1&A_2&A_3\\A_4&A_5&A_6\\A_7&A_8&A_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&A_2&A_3\\A_4&A_5&A_6\\A_7&A_8&A_9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(0)_r & (0)_{r,s} & I_r\\ (0)_{s,r} & (0)_s & (0)_{s,r}\\ (0)_r & (0)_{s,r} & (0)_r\end{pmatrix}$

$v\in\mathcal{C}(u) \iff \begin{pmatrix}A_7&A_8&A_9\\(0)&(0)&(0)\\(0)&(0)&(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(0)&(0)&A_1\\(0)&(0)&A_4\\(0)&(0)&G\end{pmatrix} \iff \begin{cases}A_7=(0)\\A_8=(0)\\A_9=A_1\\A_4=(0)\end{cases}$

Ainsi $v\in\mathcal{C}(u)$ si et seulement si $Mat(v,\mathcal{B}')$ de la forme : $\begin{pmatrix}A_1&A_2&A_3\\(0)&A_5&A_6\\(0)&(0)&A_1\end{pmatrix}$.

5 . Une base de $\{V, UV = VU\}$ est donc en prenant l'un des coefficients de A_1 égal à 1 et tous le autres coefficients nuls puis puis de même avec $A_2 \cdots$:

$$\begin{aligned}&\left(E_{i,j} + E_{r+s+i,r+s+j}\right)_{i=1..r,j=1..r} \cup \left(E_{i,j}\right)_{i=1..r,,j=r+1..r+s} \cup \left(E_{i,j}\right)_{i=1..r,j=r+s+1..n}\\ &\cup \left(E_{i,j}\right)_{i=r+1..r+s,j=r+1..r+s} \cup \left(E_{i,j}\right)_{i=r+1,r+s,j=r+s+1,n}\end{aligned}$$

C'est une base car chaque matrice $(E_{i,j})$ figure au plus une fois dans l'expression. La dimension est donc :

$$r^2 + rs + r^2 + s^2 + rs = 2r^2 + 2rs + s^2 = 3r^2 + 2r(n-2r) + (n-2r)^2$$

Ainsi par isomorphisme $\boxed{\dim \mathcal{C}(u) = n^2 - 2rn + 2r^2}$.
On recherche le minimum de cette expression sur $[0, n]$ en étudiant :$f_n(x) = 2x^2 - 2nx + n^2$,la fonction est dérivable et $f_n'(x) = 2(2x - n)$, donc f_n admet un minimum pour $x = \frac{n}{2}$ égal à $\frac{n^2}{2}$. Ainsi $\boxed{\dim \mathcal{C}(u) \geq \frac{n^2}{2}}$.

Partie III. Commutant d'un endomorphisme vérifiant la relation (1).

On utilisera régulièrement dans les calculs que deux polynômes de l'endomorphisme u commutent et que si u et v commutent tout polynôme en u commute avec tout polynôme en v
J'ai fait tous les calculs en factorisant les polynômes (et les polynômes d'endomorphisme) . On peut aussi développer et simplifier en utilisant

$$(u - 2Id)^2 \circ (u - Id) = 0 \Longrightarrow u^3 = 5u^2 - 8u + 4Id$$

et donc $u^4 = 5\left(5u^2 - 8u + 4Id\right) - 8u^2 + 4u \cdots$
1 . Il est facile de montrer que la somme est directe : Comme on a deux sous espace il suffit d'étudier l'intersection :

$$x \in E_1 \cap E_2 \Longrightarrow u(x) = x \text{ et } u^2(x) - 4u(x) + 4x = \overrightarrow{0}$$

en reportant $u(x) = x$ dans la seconde relation on trouve $u(x) = x$
pour prouver que les deux sous espaces sont supplémentaires on procède par analyse synthèse :
Soit $x \in E$

- Si $x = x_1 + x_2, x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ on a en utilisant $x_1 \in E_1$ donc $u(x_1) = x_1$

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ u(x) &= u(x_1) + u(x_2) = x_1 + u(x_2) \\ u^2(x) &= x_1 + u^2(x_2) \end{aligned}$$

  Comme $x_2 \in E_2$ on a $u^2(x_2) - 4u(x_2) + 4x_2 = 0$. donc par combinaison linéaire des relations précédentes

$$u^2(x) - 4u(x) + 4x = x_1$$

  et donc

$$x_2 = x - x_1 = -3x + 4u(x) - u^2(x)$$

- vérification:
  - on a bien $x = x_1 + x_2$
  - $(u - Id)(x_1) = u - Id) \circ (u - 2Id)^2(x) = \overrightarrow{0}$ d'après l'hypothèse sur u
  - $(u - 2Id)^2(x_2) = (u - 2Id)^2 \circ \left(-u^2 + 4u - 3Id\right)(x_2) = (u - 2Id)^2 \circ (u - Id) \circ (3Id - u)(x_2) = \overrightarrow{0}$.
    Car $(u - 2Id)^2 \circ (u - Id) = (u - Id) \circ (u - 2Id)^2 = 0$

$$\boxed{E = \ker(u - Id) \oplus \ker(u - 2Id)^2}$$

remarque : comme souvent dans ce type de calcul l'hypothèse sur u ne sert que pour la synthèse.

2 . La décomposition en éléments simples dans $\mathbf{C}(X)$ de $F(X)$ est de la forme : $F(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{c}{x-2}$.

- on multiplie par $x - 1$, puis on fait tendre x vers 1 : $\underline{a = 1}$.
- on multiplie par $(x - 2)^2$, puis on fait tendre x vers 2 : $\underline{b = 1}$.
- pour $x = 0$, on trouve enfin que $\underline{c = -1}$.

Donc $F(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-1} + \frac{3-x}{(x-2)^2}$.
Ainsi $1 = \underline{(x-1)(x-2)^2 F(x) = (x-2)^2 + (x-1)\,3-x)}$, donc $\boxed{V(X) = 1 \text{ et } U(X) = 3 - X}$
remarque : on peut aussi trouver U et V par identification.
3 . On en déduit que : $Id = U(u) \circ (u - Id) + V(u) \circ (u - 2\,Id)^2$. Donc

$$\forall x \in E,\ x = (U(u) \circ (u - Id))\,(x) + \left(V(u) \circ (u - 2\,Id)^2\right)(x).$$

Posons $x_1 = \left(V(u) \circ (u - 2\,Id)^2\right)(x)$ et $x_2 = (U(u) \circ (u - Id))\,(x)$. Ainsi $\underline{x = x_1 + x_2}$.
De plus $x_1 \in E_1 = \ker(P_1(u)) = \ker(u - Id)$ car

$$(u - Id)(x_1) = (u - Id) \circ \left(V(u) \circ (u - 2\,Id)^2\right)(x) = V(u) \circ (((u - Id) \circ (u - 2\,Id)^2)(x)) = V(u) \circ 0(x) = \overrightarrow{0}$$

et de même $x_2 \in E_2$.
On a donc décomposé x en $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. On en déduit que $x_1 = p_1(x)$ et $x_2 = p_2(x)$.
Ainsi $\forall x \in E,\ p_1(x) = x_1 = \left(V(u) \circ (u - 2\,Id)^2\right)(x)$, donc $\underline{p_1 = V(u) \circ (u - 2Id)^2 = (u - 2Id)^2 = u^2 - 4\,u + 4Id}$.
De même $\underline{p_2 = U(u) \circ (u - Id) = (3Id - u) \circ (u - Id) = -u^2 + 4\,u - 3Id}$.

4 . Montrons que $d = p_1 + 2\,p_2$ est diagonalisable.
Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$; $Mat(d, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_1 & (0) \\ (0) & I_2 \end{pmatrix}$ ce qui montre que

$$\boxed{d = p_1 + 2\,p_2 \text{ est diagonalisable}}$$

5 . $w = u - d$ avec $d = p_1 + 2p_2 = (u^2 - 4\,u + 4\,Id) + 2\,(-u^2 + 4\,u - 3\,Id) = -u^2 + 4\,u - 2\,Id$.
Donc $w = u^2 - 3\,u + 2\,Id = (u - Id) \circ (u - 2Id)$.

$$\boxed{w = (u - Id) \circ (u - 2Id)}$$

On en déduit que $w^2 = (u - Id) \circ (u - Id) \circ (u - 2\,Id)^2 = (u - Id) \circ 0 = 0$.

$$\boxed{w^2 = 0}$$

Ainsi, ou bien $w = 0$, ou bien $w \neq 0$ et $w^2 = 0$, c'est à dire w est nilpotent d'indice 2.

6. Détermination de $\mathcal{C}(u)$.

6.a

- Si $v \in \mathcal{C}(u)$, alors v commute avec tout polynôme en u, donc en particulier avec $d = -u^2 + 4\,u - 2\,Id$ et $w = u^2 - 3\,u + 2\,Id$.
- Si v commute avec d et avec w, alors v commute avec $u = d + w$.

$$\boxed{v \in \mathcal{C}(u) \iff v \in \mathcal{C}(d) \text{ et } v \in \mathcal{C}(w)}$$

6.b w est un polynôme en u, donc $E_1 = \ker(u - Id)$ et $E_2 = \ker(u - 2\,Id)$ sont stables par w.
De plus $w = (u - 2\,Id) \circ (u - Id)$, d'où $E_1 = \ker(u - Id) \subset \ker w$, donc la restriction de w à E_1 est nulle.
En outre si $x \in E_2 = \ker(u^2 - 4\,u + 4\,Id)$ on a $u^2(x) = 4u(x) - 4x$ et donc $w(x) = (u^2 - 3\,u + 2\,Id)(x) = (u - 2\,Id)(x)$ donc w et $(u - 2\,Id)$ induisent le même endomorphisme sur E_2.
On se place sur une base adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$ notée $\mathcal{B}.w$ admet dans cette base une matrice diagonale par blocs (les deux sous espaces sont stables et w est nul sur E_1) de la forme $W = \begin{pmatrix} (0)_{n_1,n_1} & (0)_{n_1,n_2} \\ (0)_{n_2,n_1} & N_{n_2,n_2} \end{pmatrix}$ où l'on sait que N_{n_2,n_2} est la matrice dans la base $\mathcal{B}_2$ de l'endomorphisme w_2 induit sur E_2 par w, donc aussi par $u - 2\,Id$.Donc

$$W = \begin{pmatrix} (0) & (0) \\ (0) & N \end{pmatrix}$$

Puisque $u = d + w$, il en résulte que $Mat(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & (0) \\ (0) & N + I_{n_2} \end{pmatrix}$.

6.c Soit w_2 l'endomorphisme induit par w sur E_2 ; on a $\ker w_2 = E_2 \cap \ker(u - 2\,Id) = \ker(u - 2\,Id)$ car $\ker(u - 2\,Id) \subset \ker(u - 2\,Id)^2 = E_2$.
Donc $\text{rg } N = \text{rg } w_2 = \dim E_2 - \dim(\ker w_2) = n_2 - \dim(\ker(u - 2\,Id))$.

6.d

- Si v commute avec u, $E_1 = \ker(u - Id)$ et $E_2 = \ker(u - 2\,Id)$ sont stables par v (ce sont des sous espaces propres de u), alors $Mat(v, \mathcal{B})$ est diagonale par blocs de la forme $V = \begin{pmatrix} V_1 & (0) \\ (0) & V_2 \end{pmatrix}$. On écrit alors que $Mat(u, \mathcal{B})$ et $Mat(v, \mathcal{B})$ commutent, on trouve que $\boxed{V_2\, N = N\, V_2}$

- Réciproquement si $Mat(u, \mathcal{B})$ est de la forme $\begin{pmatrix} V_1 & (0) \\ (0) & V_2 \end{pmatrix}$ avec $V_2\, N = N\, V_2$, on constate immédiatement que $Mat(u, \mathcal{B})$ et $Mat(v, \mathcal{B})$ commutent, donc u et v commutent, d'où $\boxed{v \in \mathcal{C}(u)}$

6.e

- Si u est diagonalisable : $u - 2\,Id$ l'est aussi et on sait l'endomorphisme w_2 induit sur E_2 par $u - 2\,Id$ est diagonalisable. Donc $N = Mat(w_2, \mathcal{B}_2)$ est diagonalisable. Or N est nilpotente, donc ses valeurs propres sont toutes nulles (un polynôme annulateur est du type X^k).

  Ainsi N est semblable à la matrice diagonale nulle, donc $\underline{N = 0}$.

- Si $N = 0$, alors $w = 0$, donc $u = d$ est diagonalisable.

$$\boxed{u \text{ est diagonalisable si et seulement si } N = 0}$$

6.f On suppose u non diagonalisable, donc $N \neq 0$, donc N est nilpotente d'indice égal à 2.
Posons $p = \dim(\ker(u - 2\,Id))$. Ainsi le rang de N est $r_2 = n_2 - p$.
Puisque N est nilpotente d'indice 2, d'après le **II.5**, le commutant de N a pour dimension $(n_2 - r_2)^2 + r_2^2 = p^2 + (n_2 - p)^2$.
On peut alors définir l'isomorphisme de $\mathcal{C}(u)$ dans $\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \times \{V, VN = NV\}$ qui a v associe le couple (V_1, V_2).
on en déduit donc

$$\boxed{\dim\, \mathcal{C}(u) = n_1^2 + p^2 + (n_2 - p)^2}$$

remarque : si u est diagonalisable $p = 0$ et la formule reste vraie d'après la première partie.