d'après **ENSAIT 1999 EPREUVE de MATHEMATIQUES II**

Durée 2 heures (tous les candidats)

Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées

L'usage des calculatrices est interdit

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $B = \left(1, X, X^2 ..., X^n\right)$ sa base canonique.

Etant donné une famille de $(n+1)$ réels distincts $a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n$, on lui associe les polynômes $L_0, L_1, L_2 ... L_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que : $\begin{cases} \forall j \in [[0..n]] - \{i\} \quad L_i(a_j) = 0 \\ L_i(a_i) = 1 \end{cases}$

On note enfin A la matrice carrée dont les vecteurs colonnes sont les composantes dans la base B des vecteurs $L_0, L_1, L_2, ... L_n$.

I) On prend $n = 2,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$.

1. Donner L_0, L_1, L_2

   Montrer que (L_0, L_1, L_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   Quelles sont les composantes d'un polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ dans cette base (L_0, L_1, L_2) ?
2. Former la matrice de changement de base de $B = \left(1, X, X^2\right)$ à $B' = (L_0, L_1, L_2)$
3. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que : $\quad P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$

II) Retour au cas général

1. Montrer que $B' = (L_0, L_1, L_2 .. L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Indiquer les composantes sur la base B' d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que A est inversible, calculer son inverse
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$.

   En déduire que la somme des éléments de la première ligne de A est égale à 1, et que la somme des éléments de toute autre ligne de A est nulle.

III) Etude du cas $\mathbf{a}_0 = 0$

1. Déterminer les coefficients de la première ligne de A
2. Montrer qu'il existe des polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$, différents du polynôme nul tels que :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) X^i$$

IV) Etude du cas $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2, ... \quad a_n = n$ On note dorénavant :

$L_{i,p}$ le polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$ tel que

$\forall j \in [[0..p]] - \{i\} \quad L_{i,p}(j) = 0$ et $L_{i,p}(i) = 1$

Et on convient que $L_{0,0} = 1$

1. Montrer que $B'' = (L_{0,0}, L_{1,1}, L_{2,2} ..., L_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k L_{k,k}$,
   1. Pour tout $j \in [[0..n]]$ calculer $L_{k,k}(j)$.
   2. Pour tout $j \in [[0..n]]$ simplifier $\sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i}$
   3. Déterminer les racines de P , puis calculer explicitemnt le polynôme P.
3.
   1. Ecrire la matrice de changement de base de $B' = (L_{0,n}\ ,\ L_{1,n}\ ,\ L_{2,n} ...\ ,\ L_{n,n})$ à B''
   2. Montrer que l'on peut écrire la matrice A comme le produit d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure.
   3. Effectuer tous les calculs du IV.3.2 pour $n = 2,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$