**L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 3 pages.**
**L'usage de la calculatrice est interdit .**

*Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les* références *des questions abordées.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

## Notations

Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à $p$ lignes et $q$ colonnes ; si $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, ${}^tM$ désigne la matrice transposée de $M$ et $\mathrm{rg}\,(M)$ son rang.

Pour tout entier naturel $k$, $\mathcal{P}_k$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré $\leqslant k$.

Dans ce problème, $n$ désigne un entier naturel non nul et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels **deux à deux distincts** ; on note $\pi$ le polynôme $\pi = (X-x_0)(X-x_1)\cdots(X-x_n)$.

Enfin, pour tout entier naturel $m$, on définit l'application

$$f_m : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_m & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(x_0), \ldots, P(x_n)\big) \end{array}$$

## 1ère Partie : Étude de l'application $f_m$

Sot $m$ un entier naturel.

1. Si $R \in \mathcal{P}_n$ est tel que pour tout $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, $R(x_i) = 0$, montrer que $R$ est le polynôme nul.
2. Vérifier que $f_m$ est une application linéaire.
3. Dans cette question, on suppose que $m \geqslant n+1$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f_m = \{Q\pi\ ;\ \ Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}$ ; on pourra effectuer une division euclidienne.
   (b) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\, f_m$ et $\mathcal{P}_n$ sont supplémentaires dans $\mathcal{P}_m$.
   (c) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}\, f_m$ puis en donner une base.
   (d) Déterminer le rang de $f_m$ ; l'application $f_m$ est-elle surjective ?
4. Dans cette question, on suppose que $m \leqslant n$.
   (a) Montrer que $f_m$ est injective.
   (b) Quel est le noyau de $f_m$ ? Quel est son rang ?
   (c) À quelle condition sur les entiers $n$ et $m$ l'application $f_m$ est-elle surjective ?
5. On définit les polynômes $L_0, L_1, \ldots, L_n$ par $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} \frac{(X-x_j)}{(x_i-x_j)}$, $i \in \{0,1,\ldots,n\}$.

(a) Pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, quel est le degré de $L_i$ ? Vérifier que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $L_i(x_k) = \delta_{i,k}$ avec $\delta_{i,k} = 1$ si $i = k$ et $0$ sinon.

(b) Calculer $f_n(L_i)$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Que représente la famille $\big(f_n(L_0), f_n(L_1), \ldots, f_n(L_n)\big)$ pour l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$ ?

(c) Montrer que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$.

(d) Soit $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

i. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_y \in \mathcal{P}_n$ tel que $f_n(P_y) = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$.

ii. Exprimer le polynôme $P_y$ en fonction de $L_0, L_1, \ldots, L_n$ et $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

## 2ème Partie : Approximation polynômiale au sens des moindres carrés

On considère des réels $y_0, y_1, \ldots, y_n$ qui sont respectivement les images des réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ par une fonction $\varphi$, et on cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathcal{P}_m$ tels que la quantité

$$\Phi_m(P) := \sum_{i=0}^{n} \big(y_i - P(x_i)\big)^2$$

soit minimale, et à préciser la valeur minimale $\lambda_m$ de ladite quantité.

On parle alors d'approximation polynômiale au sens des moindres carrés de la fonction $\varphi$ aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ; ce type d'approximation est particulièrement utilisé dans les problèmes d'optimisation et de contrôle de qualité.

**A. Étude dans le cas $m \geqslant n + 1$**

1. Donner un polynôme $Q_0 \in \mathcal{P}_m$ tel que $f_m(Q_0) = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$. Que vaut $\Phi_m(Q_0)$ ?

2. En déduire la valeur minimale $\lambda_m$ de $\Phi_m(P)$ lorsque $P$ décrit $\mathcal{P}_m$, et préciser à l'aide de $Q_0$ et $\operatorname{Ker} f_m$ l'ensemble des polynômes en lesquels cette valeur minimale est atteinte.

**B. Étude dans le cas $m \leqslant n$**

Dans cette section, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,m+1}(\mathbb{R}), \quad b = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que si $M, N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ alors ${}^t(M + N) = {}^tM + {}^tN$ et que, si $M' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $N' \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, alors ${}^t(M'N') = {}^tN'\,{}^tM'$ ; $p$, $q$ et $r$ étant des entiers naturels non nuls.

2. Soit $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$ ; on lui associe le polynôme $P_v \in \mathcal{P}_m$ défini par $P_v(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} v_k x^k$.

(a) Calculer le produit $Av$ et l'exprimer à l'aide des valeurs prises par $P_v$ aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

(b) Montrer alors que si $Av = 0$ alors $v = 0$.

3. Soit $u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ ; calculer le produit scalaire ${}^t uu$ en fonction de $u_0, u_1, \ldots, u_n$ puis en déduire que ${}^t uu \geqslant 0$ et que ${}^t uu = 0$ si et seulement si $u = 0$.

4. (a) Soit $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^t AAv = 0$ ; on pose $u = Av$. Calculer ${}^t uu$, en déduire que $Av = 0$ puis que $v = 0$.
   (b) Déterminer le rang de la matrice ${}^t AA$ et justifier qu'elle est inversible.
   (c) Expliciter les coefficients de la matrice ${}^t AA$ en fonction de $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

5. On pose $M = {}^t AA$ et $c = {}^t Ab$ ; justifier que le système linéaire $MZ = c$ , d'inconnue $Z$, admet une unique solution qu'on exprimera en fonction de $M^{-1}$ et $c$.

   *Dans la suite, cette solution se notera $w$, on lui associe le polynôme $P_w$ défini comme à la question 2. précédente.*

6. Pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$, on pose $g(v) = {}^t(b - Av)(b - Av)$.
   (a) Montrer que pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$, $g(v) = {}^t bb - {}^t bAv - {}^t v\, {}^t Ab + {}^t v\, {}^t AAv$ et que $g(w) = {}^t bb - {}^t bAw$ ; on rappelle que ${}^t AAw = {}^t Ab$.
   (b) Montrer que pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$, $g(v) - g(w) = {}^t(w - v)\, {}^t AA(w - v)$.
   (c) En déduire que pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$, $g(v) \geqslant g(w)$ et que $g(v) = g(w)$ si et seulement si $v = w$. On pourra utiliser les questions 2.(b) et 3. précédentes.

7. On muni $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique noté $< .,. >$ ; montrer que $Aw$ est la projection orthogonale de $b$ sur le sous-espace vectoriel $F := \{Av \; ; \; v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})\}$. Que représente $g(w)$ ?

8. Soit $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathcal{P}_m$, on pose $\mathrm{V}_{\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$. Calculer les composantes du vecteur $b - AV_{P}$ et en dédsuire que $\Phi_m(P) = g(V_P)$.

9. (a) Déduire de ce qui précède que pour tout $P \in \mathcal{P}_m$, $\Phi_m(P) \geqslant \Phi_m(P_w)$ avec égalité si et seulement si $P = P_w$.
   (b) Que vaut $\lambda_m$ ?

10. **Application**

    On prend $n = 3$, $m = 3$, $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 1$ et $y_3 = 0$
    (a) Calculer les matrices $A$ et ${}^t AA$.
    (b) Calculer le vecteur ${}^t Ab$.
    (c) Résoudre le système linéaire ${}^t AAZ = {}^t Ab$, d'inconnue $Z$, par la méthode du pivot de Gauss.
    (d) Quel est le polynôme $P_0$ de degré $\leqslant 3$ qui minimise $\Phi_3$ sur $\mathcal{P}_3$ ? Que vaut $\lambda_3$ ? Tracer le graphe de la fonction $t \longmapsto P_0(t)$ et représenter les points $(x_i, y_i)$ sur le même graphique.

FIN DE L'ÉPREUVE