E.P.I.T.A. - Concours 2005

Option - durée 2h

Dans ce problème, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(0; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère dans ce contexte :
- le cercle C centré en $\Omega(8,\ 0)$ et de rayon $R = 8$.
- la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 2$.
- une droite $\mathcal{D}_t$ passant par l'origine, d'équation $y = t\,x$ où t désigne un paramètre réel.

Dans la suite, on représentera sur une même figure les résultats obtenus au fil des questions. Cette figure fera apparaître seulement le demi-plan $x \geq 0$ et elle sera construite avec soin sur une feuille séparée en choisissant (approximativement) pour unité 1 cm.

1°) *Introduction*

a) Déterminer une équation cartésienne du cercle C.

b) Préciser les coordonnées des points d'intersection de C et $\mathcal{D}$.
On notera A et B ces deux points en supposant que A est celui d'ordonnée positive.
Représenter sur la figure le cercle C, la droite $\mathcal{D}$ et les points A et B.

c) Déterminer les coordonnées de $P(t)$, point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{D}_t$.
Déterminer les coordonnées de $Q(t)$, point d'intersection (distinct de O) de C et de $\mathcal{D}_t$

d) En déduire les coordonnées du milieu du segment $[P(t),\ Q(t)]$.
Déterminer les valeurs du paramètre t pour lesquelles ce milieu est égal à A ou B.

On se propose maintenant d'étudier la courbe paramétrée $\Gamma : t \longrightarrow M(t)$ définie par :

$$x(t) = \frac{t^2 + 9}{t^2 + 1} \quad ; \quad y(t) = \frac{t(t^2 + 9)}{t^2 + 1}.$$

2°) *Etude des variations des fonctions x et y*

a) Comparer $x(-t)$ et $x(t)$, $y(-t)$ et $y(t)$.
Qu'en déduit-on géométriquement pour la courbe Γ ?

b) Etudier les limites de $x(t)$ et $y(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
Qu'en déduit-on pour les branches infinies de la courbe Γ ?

c) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ et étudier le signe de ces fonctions.
En déduire les coordonnées des points U et V où la tangente est horizontale.
On notera U et V ces deux points en supposant que U est celui d'ordonnée positive.
En déduire les coordonnées du point I où la tangente est verticale.

d) Dresser un tableau de variation commun aux fonctions x et y pour $t \geq 0$.

3°) *Construction de la courbe Γ*

a) Représenter les points I, U, V, leurs tangentes et la branche infinie de Γ sur la figure.

b) Tracer avec soin la courbe représentative de Γ sur la figure.

4°) *Condition d'alignement de points de la courbe Γ*

On considère trois points distincts de Γ, de paramètres t_1, t_2, t_3.

a) En remarquant que trois tels points ne peuvent être alignés sur une droite verticale, établir l'équivalence des trois conditions suivantes :

- les trois points $M(t_1), M(t_2), M(t_3)$ sont alignés.
- il existe $(m, h) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall\, i = 1, 2, 3 :\ y(t_i) = m\, x(t_i) + h$.
- il existe $(m, h) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall\, i = 1, 2, 3 :\ t_i^3 - (m + h)\, t_i^2 + 9\, t_i - (9\, m + h) = 0$.

b) Etablir que cette dernière condition équivaut aussi à l'existence d'un couple (m, h) tel que :

$$(X - t_1)(X - t_2)(X - t_3) = X^3 - (m + h)\, X^2 + 9\, X + (9\, m + h).$$

c) En déduire à quelle condition sur t_1, t_2, t_3 les points $M(t_1), M(t_2), M(t_3)$ sont alignés.

5°) *Calculs d'aires*

Pour tout point $M(x, y)$ du demi-plan $x > 0$, on pose $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ avec $|\theta| < \frac{\pi}{2}$.

a) Montrer, lorsque $M = M(t)$, que $\tan(\theta) = t$ et qu'une équation polaire de Γ est

$$r = \frac{9\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

b) On désigne par $\mathcal{B}$ le domaine borné délimité par la courbe Γ et les deux droites OU et OV. Montrer que son aire $\mathcal{A}$ est égale à l'intégrale suivante :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{9\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\cos(\theta)} \right)^2 d\theta.$$

En déduire la valeur de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{B}$.

c) Expliciter, sous la forme $r = f(\theta)$, une équation polaire de la droite asymptote de Γ.

d) En déduire que l'aire du domaine borné $\mathcal{B}(\alpha)$ compris entre la courbe Γ, son asymptote et les deux droites d'angles polaires $-\alpha$ et α (avec $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) est égale à l'intégrale suivante :

$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\left(9\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)^2 - 1}{\cos^2(\theta)}\, d\theta.$$

Etudier si cette intégrale admet ou non une limite finie lorsque α tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer celle-ci si elle existe.

***