CCP PSI 2005
Math 2
Partie I.

I.1. On obtient directement, à partir de la formule du produit scalaire:

- par symétrie hermicienne :$(y|x) = \overline{(x|y)}$
- par semi linéarité à gauche :$(\lambda x|y) = \overline{\lambda}(x|y)$
- par linéarité à droite :$(x|\mu y) = \mu(x|y)$

I.2.1. Une famille de deux vecteurs est une base de $\mathbb{C}^2$ si et seulement si son déterminant dans une base est non nul.
Or $\det(x, y) = (3-2i)a - (1+3i)(-1+5i) = (3-2i)a + (16-2i)$
$\det(x, y) = 0 \Leftrightarrow \overline{a} = \frac{-16+2i}{3-2i} = \frac{(-16+2i)(3+2i)}{13} = -4-2i$

$$\boxed{(x, y) \text{ libre} \iff a \neq -4-2i}$$

I.2.2. La famille est orthogonale si le produit scalaire est nul (dans ce cas, c'est une base car les vecteurs qui la composent son non nul). Ceci a lieu si

$$(y|x) = \overline{a}(-1+5i) + (1-3i)(3-2i) = 0$$

c'est à dire si $a = \frac{(-3-11i)}{(1-5i)} = \frac{(-3-11i)(1+5i)}{26}$

$$\boxed{x \perp y \iff a = 2+i}$$

Dans ce cas, on $\|x\|^2 = |2+i|^2 + |1+3i|^2 = 5 + 10$

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{15}}$$

I.3.1. Le polynôme caractéristique de T est

$$P_T = det(I_2 - XT) = X^2 + 1$$

i et $-i$ sont donc les deux valeurs propres complexes simples. Les sous-espaces propres sont tout deux de dimension 1 L On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_i(T) \iff \begin{cases} -ix + y\sqrt{3} = 0 \\ -x\sqrt{3} - 3iy = 0 \end{cases} \iff x = -iy\sqrt{3}$$

$$E_i(T) = Vect((-i\sqrt{3}, 1)),\ E_{-i}(T) = Vect((-1/\sqrt{3}, i))$$

I.3.2. Les vecteurs $(-i\sqrt{3}, 1)$ et $(-1/\sqrt{3}, -i)$ sont orthogonaux (produit scalaire nul). On obtient une base orthonormale en le divisant par leur norme. Cette base est

$$\boxed{\text{une base O.N. de vecteurs propres est } ((-i\sqrt{3}/2, 1/2), (-1/2, i\sqrt{3}/2))}$$

I.4. Le calcul donne :${}^t\overline{U}U = \begin{pmatrix} \overline{a}a + \overline{b}b & \overline{a}c + \overline{b}d \\ \overline{c}a + \overline{d}b & \overline{c}c + \overline{d}d \end{pmatrix}$

$${}^t\overline{U}U = \begin{pmatrix} \|x\|^2 & (x|y) \\ (x|y) & \|y\|^2 \end{pmatrix}$$

Partie II.

II.1. Le calcul de $I.4$ donne immédiatement que :

$$\underline{U \in \mathcal{U} \text{ si et seulement si la famille } (x, y) \text{ des vecteurs colonnes de } U \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{C}^2}$$

.

II.2. En prenant le déterminant de la relation ${}^t\overline{U}U = I_2$, on obtient : $|det(U)|^2 = \overline{det(U)}det(U) = det({}^t\overline{U})det(U) = det(I_2) =$ 1On a donc

$$\boxed{|det(U)| = 1}$$

II.3.

II.3.1. U est inversible car son déterminant est non nul et $U^{-1} = {}^t\overline{U}$. Un calcul de U^{-1} (Pivot de Gauss ou Cramer) donn

$$U^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

On constate donc que $\left(\overline{U}\right)^{-1} = \overline{(U^{-1})}$.

On a donc ${}^t\left(\overline{U^{-1}}\right)U^{-1} = {}^t\overline{U}^{-1}U^{-1} = UU^{-1} = I_2$

II.3.2. On peut vérifier que $\overline{({}^tU)} = {}^t\left(\overline{U}\right)$ et donc

- ${}^t\left(\overline{\overline{U}}\right).\overline{U} = {}^tU\overline{U} = \overline{{}^t\overline{U}U} = \overline{I_2} = I_2$ donc $\overline{U} \in \mathcal{U}$
- ${}^t\left(\overline{({}^tU)}\right)^t U = \overline{U}^tU = {}^t\left({}^t\overline{U}U\right) = {}^tI_2 = I_2$ donc ${}^tU \in \mathcal{U}$

$$\boxed{U \in \mathcal{U} \Longrightarrow U^{-1} \in \mathcal{U}, \overline{U} \in \mathcal{U}, {}^tU \in \mathcal{U}.}$$

II.3.3. Soient $U, V \in \mathcal{U}$. On a : ${}^t\overline{(UV)}UV = {}^t\overline{V}{}^t\overline{U}UV = {}^t\overline{V}V = I_2$

$$\boxed{U, V \in \mathcal{U} \Longrightarrow UV \in \mathcal{U}}$$

II.4. Il existe une matrice colonne non nulle X tel que $UX = \lambda X$. En prenant la norme de ces matrices, on obtient

$${}^t\overline{X}{}^t\overline{U}UX = |\lambda|^2\|x\|^2$$

Comme $U \in \mathcal{U}$, on a donc $\|X\|^2 = |\lambda|^2\|X\|^2$ et comme $X \neq (0)$

$$\boxed{|\lambda| = 1}$$

Partie III.

III.1.1. On écrit que les colonnes de U forment une base orthonormée (trois relations) et que le déterminant de U vaut 1. Le relations sont donc

$$\boxed{|a|^2 + |b|^2 = 1,\ |c|^2 + |d|^2 = 1,\ \overline{a}c + \overline{b}d = 0,\ ad - bc = 1}$$

III.1.2. Si $U \in \mathcal{SU}$ alors $U^{-1} = {}^t\overline{U}$ et, par le calcul de l'inverse du **II.3.1.** on a l'expression de U^{-1} avec $ad - bc = 1$ d'où :

$$\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$$

On obtient donc $\underline{d = \overline{a} \text{ et } c = -\overline{b}}$.

III.1.3. Si $U \in \mathcal{SU}$ alors U est donc du type $U = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ et comme chaque colonne est de norme 1, on a aussi $|a|^2 + |b|^2 =$ 1

Réciproquement, si U est du type précédent alors les colonnes sont de normes 1, orthogonales et le déterminant vau $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

On a donc $U \in \mathcal{SU}$.

$$\boxed{U \in \mathcal{SU} \Longleftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{C}^2,\ U = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}}$$

III.2.1. On sait déjà (**II.4**) que les valeurs propres sont de module 1 . Les valeurs propres sont du type $e^{i\theta}$ et $e^{i\phi}$. Mais d'aprè le déterminant le produit des valeurs propres vaut 1 donc $\phi - -\theta$

$$\boxed{\text{Il existe } \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que es valeurs propres de } U \text{ sont donc } e^{i\theta} \text{ et } e^{-i\theta}.}$$

III.2.2. $a = i/2$ et $b = -\sqrt{3}/2$ vérifient $|a|^2 + |b|^2 = 1$ et ainsi $T \in \mathcal{SU}$. Les calculs de la partie I donnent comme $P \in \mathcal{SU}$:

$$T = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = D_{\pi/2} \text{ et } P = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -i\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Partie IV

IV.1.1. Les conditions sur a, b, c, d pour que $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ sont: $a = \overline{a}, d = \overline{d}, c = \overline{b}$ pour avoir ${}^tA = \overline{A}$ et $a + d = 0$ pou avoir $tr(A) = 0$

a et d sont donc des réels opposés et b et c des complexes conjugués. On a donc $A = \begin{pmatrix} a & r+is \\ r-is & -a \end{pmatrix}$ avec a, r, s réels. en posant $r = \mathrm{Re}(c), s = \mathrm{Im}(c)$

- Réciproquement, toute matrice du type précédent est dans $\mathcal{V}$ (quatre propriétés vérifiées). On a donc

$$\mathcal{V} = \{aE_1 + rE_2 + sE_3 / \ (a, r, s) \in \mathbb{R}\} = Vect(E_1, E_2, E_3)$$

$\mathcal{V}$ est donc un espace vectoriel réel dont on a une famille génératrice.

De plus cette famille étant libre : si $aE_1 + rE_2 + sE_3 = 0$ on obtient $\begin{pmatrix} a & r+is \\ r-is & -a \end{pmatrix} = (0)$ ce qui donne $a = r = s =$

$$\boxed{\mathcal{V} \text{ est un } \mathbb{R}\text{−espace vectoriel de base } (E_1, E_2, E_3)}$$

IV.1.2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & r+is \\ r-is & -a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b & \rho+i\sigma \\ \rho-i\sigma & -b \end{pmatrix}$ on a $AB = \begin{pmatrix} ab + (r+is)(\rho-i\sigma) & ? \\ ? & ab + (r-is)(\rho+i\sigma \end{pmatrix}$

donc $\frac{1}{2}\ tr(AB) = ab + r\rho + s\sigma$

L'application $< .,. >$ est

- à valeurs réelles d'après l'expression précédente
- symétrique car $tr(AB) = tr(BA)$
- linéaire par rapport à la seconde variable.
- définie positive : $\langle A, A\rangle = a^2 + r^2 + s^2 \geq 0$ et $\langle A, A\rangle = 0 \Rightarrow a = r = s = 0 \Rightarrow A = 0$

$$\boxed{\text{c'est un produit scalaire sur } \mathcal{V}}$$

.

Le calcul précédent donne $\|A\|^2 = a^2 + r^2 + s^2$. de plus $\det(A) = -a^2 - (r+is)(r-is) = -a^2 - r^2 - s^2$

$$\boxed{\|A\|^2 = -det(A)}$$

IV.1.3. On en déduit immédiatement que$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \ < E_i, E_i >= \|E_i\|^2 = 1$

Par ailleurs l'expression $\langle A, B\rangle = ab + r\rho + s\sigma$donne facilement $\forall i \neq j, \ < E_i, E_j >= 0$

$$,\boxed{\text{la famille } (E_1, E_2, E_3) \text{ est une base orthonormée de } \mathcal{V}.}$$

IV.2.1.

- ℓ_P est linéaire: $P\left(\alpha A + \beta B\right)P^{-1} = \alpha PAP^{-1} + \beta PBP^{-1}$
- ℓ_P est à valeurs dans $\mathcal{V}$:
  - ${}^t\left(\overline{\ell_P(A)}\right) = \ell_P\left(A\right)$. En effet $P \in \mathcal{U}$ donc ${}^t\overline{P}P = I_2$ et donc $P^{-1} = {}^t\overline{P}$ donc $\ell_P(A) = PA{}^t\overline{P}$. De plus $A \in \mathcal{V}$ don ${}^t\overline{A} = A$ donc
  $${}^t\left(\overline{\ell_P(A)}\right) = {}^t\left(\overline{PA{}^t\overline{P}}\right) = {}^t\left(\overline{PA}{}^tP\right) = P\ {}^t\overline{A}\,{}^t\overline{P} = PA\,{}^t\overline{P} = \ell_P\left(A\right)$$
  - $tr\left(\ell_P\left(A\right)\right) = 0$ car deux matrices semblables ont même trace.
- ℓ_P conserve la norme :$\|PAP^{-1}\|^2 = \frac{1}{2}tr(PA^2P^{-1}) = \frac{1}{2}tr(A^2) = \|A\|^2$ en utilisant de nouveau que deux matrice semblables ont même trace.
- tout endomorphisme orthogonal étant un automorphisme on a le résultat :

$$\boxed{\ell_P \text{ est un automorphisme orthogonal de } \mathcal{V}}$$

IV.2.2. Si P et Q sont dans $\mathcal{SU}$ alors $PQ \in \mathcal{SU}$: on sait déjà que $PQ \in \mathcal{U}$ (question $II.3.3$) et $det(PQ) = det(P)det(Q) =$ 1

Ainsi, $\mathcal{SU}$ est stable par produit.

De plus $\forall A \in \mathcal{V}$: $\ell_P \circ \ell_Q(A) = QPAP^{-1}Q^{-1} = (QP)A(QP)^{-1} = \ell_{PQ}(A)$

$$\boxed{\ell_{PQ} = \ell_P \circ \ell_Q}$$

IV.3.1. On remarque que $D_\theta^{-1} = D_{-\theta}$ et donc :

$$\ell_{D_\theta}(E_1) = D_\theta E_1 D_{-\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = E_1$$

$$\ell_{D_\theta}(E_2) = D_\theta E_2 D_{-\theta} = \begin{pmatrix} 0 & e^{2i\theta} \\ e^{-2i\theta} & 0 \end{pmatrix} = \cos(2\theta)E_2 + \sin(2\theta)E_3$$

$$\ell_{D_\theta}(E_3) = D_\theta E_3 D_{-\theta} = \begin{pmatrix} 0 & ie^{2i\theta} \\ -ie^{2i\theta} & 0 \end{pmatrix} = -\sin(2\theta)E_2 + \cos(2\theta)E_3$$

IV.3.2. La matrice de ℓ_{D_θ} dans la base orthonormée (E_1, E_2, E_3) est donc $R_{2\theta}$. La base est orthonormée directe et $\underline{\ell_{D_\theta} \text{ est une rot}}$

IV.4. On a l'existence de $P \in \mathcal{SU}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $U = PD_\theta P^{-1}$ et donc

$$\ell_U = \ell_P \circ \ell_{D_\theta} \circ \ell_{P^{-1}} = \ell_P \circ \ell_{D_\theta} \circ (\ell_P)^{-1}$$

Dans la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3)$, on a donc

$$Mat(\ell_U) = QR_{2\theta}Q^{-1} \ \text{ où } \ Q = Mat(\ell_P)$$

Comme ℓ_P est un automorphisme orthogonal de $\mathcal{V}$ et comme $\mathcal{E}$ est une base orthonormée de $\mathcal{V}$, Q est une matric orthogonale. Q est donc une matrice de passage de la base orthonormée $\mathcal{E}$ vers une autre base orthonormée $\mathcal{F}$ = (F_1, F_2, F_3). Par formule de changement de base, on a

$$Mat(\ell_U, \mathcal{F}) = R_{2\theta}$$

Ainsi, ℓ_U est une rotation de $\mathcal{V}$.

- Si ℓ_P est directe $\mathcal{F}$ est direct et on a une rotation d'axe dirigé par F_1 et d'angle 2θ
- Si ℓ_P est directe $\mathcal{F}$ est indirect et on a une rotation d'axe dirigé par F_1 et d'angle -2θ

IV.5.1. On a $H = \begin{pmatrix} q & i\overline{b} \\ -ib & -q \end{pmatrix}$ et donc

$$\boxed{H = qE_1 + Im(b)E_2 + Re(b)E_3 \in \mathcal{V}}$$

IV.5.2. U est un polynôme en H et commute donc avec H. Ainsi

$$\ell_U(H) = UHU^{-1} = H$$

IV.5.3. H est laissé stable par la rotation ℓ_U. Si $H \neq 0$ alors il dirige l'axe de la rotation. Deux cas se présentent donc

- Si $U \in Vect(I_2)$ alors $\ell_U = Id_{\mathcal{V}}$ est une rotation d'angle nul. tout droites est un "axe"
- Sinon, $H \neq 0$ et H dirige l'axe de la rotation. On a $H = qE_1 + sE_2 + rE_3$.

IV.6. D'après la question $IV.4$, ℓ_T est une rotation d'angle $\pm\pi$. D'après la question précédente, l'axe de la rotation est dirig par $F = \frac{1}{2}E_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}E_3$.

$$\boxed{\ell_T \text{ est la symétrie par rapport à } Vect(\tfrac{1}{2}E_1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}E_3)}$$

IV.7.1. Si U a une valeur propre double λ alors (question $III.2.1$) alors $\lambda = e^{i\theta} = e^{-i\theta}$ et donc $\theta = 0[\pi]$. On a ainsi $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$. En reprenant la trace on a $2Re(a) = 2\lambda$ et comme $|a|^2 + |b|^2 = 1$, c'est que $b = 0$ et $a = 1$ ou $a = -1$. On donc deux solutions qui I_2 ou $-I_2$ qui sont diagonalisables dans toute base et on a donc le résultat voulu.

IV.7.2. Si U a deux valeurs propres distinctes $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ alors U est diagonalisable (il y a deux valeurs propres distinctes e dimension 2) et chaque sous-espace propre est une droite. Si on montre que ces deux droites sont orthognales alors e prenant un vecteur v_1 normé de l'un des sous-espaces propres et v_2 normé dans l'autre sous-espace propre la matrice d passage P de la base canonique à (v_1, v_2) sera dans $\mathcal{SU}$ et diagonalisera A ce qui nous permettra de conclure.
Soit donc x_1 vecteur propre associé à $e^{i\theta}$ et x_2 vecteur propre associé à $e^{-i\theta}$. On a

$$(Ux_1, Ux_2) = (e^{i\theta}x_1, e^{-i\theta}x_2) = e^{-2i\theta}(x_1, x_2)$$

Or, on a aussi

$$(Ux_1, Ux_2) = {}^t\,\overline{Ux_1}Ux_2 = {}^t\,\overline{x_1}\,{}^t\overline{U}Ux_2 = {}^t\,\overline{x_1}x_2 = (x_1, x_2)$$

et comme $e^{-2i\theta} \neq 1$ (valeurs propres distinctes), $(x_1|x_2) = 0$, ce qu'il fallait prouver.