EPITA 2010

Epreuve commune

Même si cela surcharge un peu les notations je note $\Delta(P)$ et non ΔP l'image de P par Δ.

Partie I : Etude de Δ

1. base de $\mathbb{R}[X]$

a) La famille $(P_k)_{k=0}^n$ est étagée en degré, elle est donc libre :

- si $n=0$ (P_0) est libre : un seul élément non nul.
- si $n=1$ $(1,X)$ est libre : $aX+b=0 \Rightarrow a=b=0$
- si $(P_k)_{k=0}^{n-1}$ est libre . On regarde une combinaison linéaire $\sum_{k=0}^{n} \mu_k P_k = 0$. Il y a un seul terme de degré n qui provient de $\mu_n P_n$. Donc $\mu_n = 0$.
  Par l'hypothèse de récurrence tous les $(\mu_k)_{k=0}^{n-1}$ sont nuls;

On a donc une famille libre de $n+1$ éléments en dimension $n+1$, c'est une base

b) La famille $(P_k)_{k=0}^{+\infty}$ est libre puisque toute sous famille $(P_k)_{k=0}^n$ l'est.

Elle est génératrice : Si $P \in \mathbb{R}[X]$ $P \neq 0$, on pose $N = d^\circ(P)$, on a alors $P \in \mathbb{R}_N[X]$ donc P combinaison linéaire des $(P_k)_{k=0}^N$. Tout polynôme (nul ou non) est donc bien combinaison linéaire d'un nombre fini de P_k

$$\boxed{(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est une base de } \mathbb{R}[X]}$$

c) Si on calcule pour $P_n(K)$ (pour distinguer le k du calcul et celui de l'indice)

- si $n=0$ $P_0(K) = P_0(-K) = 1 \in \mathbb{N}$
- si $K \in [[0, n-1]]$, il existe $k \in [[0, n-1]]$, $k = K$. L'un des facteurs du produit est nul donc $P_n(K) = 0$
- si $K \geq n$, $P_n(K) = \dfrac{K(K-1)\cdots(K-n+1)}{n!} = \dfrac{K!}{n!(K-n)!} = \dbinom{K}{n}$ est un entier.
- dans tous les cas $P_n(-K) = \dfrac{(-K)(-K-1)\cdots(-K-n+1)}{n!} = (-1)^n \dfrac{(n+K-1)!}{n!(K-1)!} = (-1)^n \dbinom{n+K-1}{n} \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } \forall K \in \mathbb{N} \text{ , } P_n(K) \in \mathbb{N} \text{ , } P_n(-K) \in \mathbb{Z}}$$

et de plus $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } \forall K \in [[0, n-1]] \text{ , } P_n(K) = 0}$

d)

- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$ avec pour tout k , $\lambda_k \in \mathbb{Z}$ alors pour tout $K \in \mathbb{Z}$, $P(K) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(K)$ est une somme de produits d'entiers , donc un entier.
- Réciproquement si $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$ vérifie : $\forall K \in \mathbb{Z}$, $P_k(K) \in \mathbb{Z}$:
  - on prend $K=0$ on a $P_0(0) = 1$ et $\forall k > 0$, $P_k(0) = 1$ donc $\lambda_0 = P(0) \in \mathbb{Z}$
  - on prend $K=1$: $\lambda_0 + \lambda_1 + \sum 0 = P(1)$ et donc $\lambda_1 = P(1) - \lambda_0 \in \mathbb{Z}$
  - par récurrence forte on suppose $\lambda_0 \cdots \lambda_p$ entiers . et on prend $K = p+1$:

$$P(p+1) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(p+1) = \sum_{k=0}^{p+1} \lambda_k \binom{p+1}{k}$$

le dernier termes est $1.\lambda_{p+1}$ et donc :

$$\lambda_{p+1} = P(p+1) - \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} \lambda_k \in \mathbb{Z}$$

par somme de produits d'entiers.

$$\boxed{P \text{ a des coordonnées entières dans la base } (P_k) \text{ ssi } \forall K \in \mathbb{Z} \text{ , } P(K) \in \mathbb{Z}}$$

2. Etude de Δ

a) On vérifie que pour tous polynômes P et Q et pour tous scalaires λ et μ :

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P+\mu Q) &= (\lambda P+\mu Q)(X+1)-(\lambda P+\mu Q)(X)\\ &= \lambda P(X+1)+\mu Q(X+1)-\lambda P(X)-\mu Q(X)\\ &= \lambda\left(P(X+1)-P(X)\right)+\mu(Q(X+1)-Q(X))\\ &= \lambda\Delta(P)+\mu\Delta(Q)\end{aligned}$$

Donc Δ est linéaire . Et l'image par Δ d'un polynôme est bien un polynôme.

$$\boxed{\Delta\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}[\mathrm{X}]\right)}$$

b) $\Delta(P_0)=1-1=0$ et pour $n>0$:

$$\begin{aligned}\Delta(P_n) &= \frac{1}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n-1}(X+1-k))-\prod_{k=0}^{n-1}(X-k))\right)=\frac{1}{n!}\left(\prod_{k=-1}^{n-2}(X-k))-\prod_{k=0}^{n-1}(X-k))\right)\\ &= \frac{1}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)\right)((X+1)-(X-n+1))=\frac{1}{(n-1)!}\left(\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)\right)=P_{n-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta(P_0)=0,\forall n\geq 1\ ,\ \Delta(P_n)=P_{n-1}}$$

c) Tout polynôme se décompose dans la base (P_k)

- si $d^\circ(P)=d>0$ alors il existe des $(\lambda_k)_{k=0}^d$ $P=\sum_{k=0}^{d}\lambda_kP_k$ avec $\lambda_d\neq 0$. On a alors $\Delta(P)=\sum_{k=1}^{d}\lambda_kP_{k-1}$. On a une combinaison linéaire de polynômes de degré tous différents , le degré est donc le maximum des degré donc $d-1$ (toujours car $\lambda_d\neq 0$) .
- Si $d^\circ(P)=0$, $\mathrm{d}^\circ(\Delta(P))=-\infty$.

Δ diminue de 1 le degré de tout polynôme non constant et $\Delta(1)=0$ donc $\forall P$, $d^\circ(\Delta(P))\leq d^\circ(P)-1$, donc si $d^\circ(P)=d$ alors $d^\circ(\Delta^{d+1}(P))\leq -1$ donc $\Delta^{d+1}(P)=0$

$$\boxed{\text{si } d^\circ(P)=d>0\ ,\ d^\circ(\Delta(P))=d-1 \text{ et pour tout } d\ \Delta^{d+1}(P)=0}$$

d) D'après l'étude des degrés : $d^\circ(P)>0\Rightarrow P\notin\mathrm{Ker}(\Delta)$ et $d^\circ(P)=0\Rightarrow P\in\mathrm{Ker}(\Delta)$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta)=\mathbb{R}_0[X]}$$

le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$ donc Δ n'est pas injective.

Tout polynôme $P=\sum_{k=0}^{d}\lambda_kP_k$ admet , (d'après les calculs précédents) au moins un antécédent $\sum_{k=0}^{d}\lambda_kP_{k+1}$

$$\boxed{\Delta \text{ est surjective , non injective}}$$

3. Expression dans la base:

a) comme $\Delta(P_n)=P_{n-1}$ si $n\geq 1$ et $\Delta(P_0)=0$ on a $\Delta^k(P_n)=\begin{cases}0 \text{ si } k>n\\ P_{n-k} \text{ si } k\leq n\end{cases}$

De plus $P_0(0)=1$ et $P_{n-k}(0)=0$ si $n-k>0$ donc $\Delta^k(P_n)(0)=\begin{cases}0 \text{ si } k>n\\ 1 \text{ si } k=n\\ 0 \text{ si } k<n\end{cases}$ soit $\boxed{\Delta^k(P_n)(0)=\delta_{k,n}}$

b) On sait que si $d=d^\circ(P)$ on a une décomposition $P=\sum_{n=0}^{d}\lambda_nP_n$. On a donc $\Delta^k(P)(0)=\sum_{n=0}^{d}\lambda_n\Delta^k(P_n)(0)$. Tous les termes de la somme sont nuls sauf pour $k=n$; et si $k=n$, $\Delta^k(P_n)(0)=1$. Il reste donc $\lambda_k=\Delta^k(P)(0)$ et donc $P=\sum_{n=0}^{d}\Delta^n(P)(0)P_n$ .Enfin pour $n>d$, $\Delta^n(P)=0$ donc $\sum_{n=d+1}^{+\infty}\Delta^n(P)(0)P_n=0$. Donc

$$\boxed{\forall P\in\mathbb{R}[X], P=\sum_{n=0}^{+\infty}\Delta^n(P)(0)P_n}$$

4.

a) Dans la base (P_k) on a $\Delta_d(P_0) = 0$ et pour $n > 0$, $\Delta_d(P_n) = P_{n-1}$ donc $Mat(\Delta_d) = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

.

On a une matrice $(d+1)\times(d+1)$ pour coefficients $m_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j-1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Dans la base $\left(X^k\right)$ on a $\Delta_d(X^k) = (X+1)^k - X^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j$ donc $Mat(\Delta_d) = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \binom{2}{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 & \binom{n}{1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a une matrice $(d+1)\times(d+1)$ pour coefficients $m_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} \text{ si } j > i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

b) La matrice est triangulaire , les valeurs propres sont les termes diagonaux . la seule valeur propre de Δ_d est 0.Le sous espace propre est le noyau $\mathbb{R}_0[X] \neq \mathbb{R}_d(X]$ car ici $d \geq 1$

$$\boxed{\Delta_d \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

On sait que pour $n \leq d$, $\Delta_d^{d+1}(P_n) = 0$ l'image d'une base caractérise l'application donc $\boxed{\Delta_d^{d+1} = \widetilde{0}}$

Remarque : par contre Δ^{d+1} est surjective (donc non nul) pour tout d .

Partie II : approximation de dérivées

5. On peut rédiger une récurrence en utilisant la formule de Pascal.
Il est plus simple d'introduire l'endomorphisme $T : P- > P(X+1)$ On a alors $T^j(P) = P(X+j)$ et $\Delta = T - Id$.
Comme T et Id commutent on peut écrire : $\Delta^n = (T - Id)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} T^j \circ (Id)^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} T^j$ et donc :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{R}[x] \text{ , } \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } \Delta^n(P) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j)}$$

6.

a) On décompose $X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$.

- Le seul terme de degré n donne : $1 = \lambda_n . \dfrac{1}{n!}$ donc $\lambda_n = n!$
- On a $\Delta^n(X^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \Delta^n(P_k) = \lambda_n + \sum 0 = \lambda_n = n!$
- La relation $\Delta^n(X^n) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} (X+j)^n$ donne $n! = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} (X+j)^n$ .La valeur en 0 donne :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } n! = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} j^n}$$

b) sur le même principe pour $k < n$ $\Delta^n(X^k) = 0$ et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\forall k \in [[0, n-1]]\ , 0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j}\, j^k}$$

7.

a) On a comme la fonction est C^n :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n)$$

et plus généralement :

$$f(a+jh) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} j^k h^k + o(h^n)$$

Par combinaison linéaire des expressions précédentes on a:

$$\begin{aligned} h^n A_n(h) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} j^k h^k + o(h^n) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} h^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^k \right) + o(h^n) \end{aligned}$$

car :

- – les sommes sont finis , on peut donc permuter les $\sum$ sans danger
  – une combinaison linéaires de fonctions négligeables devant h^n est toujours négligeable.

D'après la question précédente , toute les $\sum_j$ sont nuls sauf pour $k = n$

$$h^n A_n(h) = h^n f^{(n)}(a) + o(h^n)$$

En divisant par h^n : $A_n(h) = f^{(n)}(a) + o(1)$

$$\boxed{\lim_{h->0} (A_n(h)) = f^{(n)}(a)}$$

Somme des puissance des entiers

8.

a) On a

$$\sum_{k=0}^{p} \Delta(Q)(k) = \sum_{k=0}^{p} (Q(k+1) - Q(k)) = Q(p+1) - Q(0)$$

par télescopage.

b) On a $P_1 = X$, $P_2 = \dfrac{X(X-1)}{2} = \dfrac{X^2 - X}{2}$ $P_3 = \dfrac{X(X-1)(X-2)}{6} = \dfrac{X^3 - 3X^2 + 2X}{6}$.

On peut résoudre et utiliser $P_k = \Delta(P_{k+1})$:

$X = P_1 = \Delta(P_2) = \Delta \left(\dfrac{X(X-1)}{2} \right)$

$X^2 = 2P_2 + X = 2P_2 + P_1 = \Delta(2P_3 + P_2) = \Delta(\dfrac{2X(X-1)(X-2)}{6} + \dfrac{X(X-1)}{2}) = \Delta \left(\dfrac{X(X-1)(2X-1)}{6} \right)$

$X^3 = 6P_3 + 3X^2 - X = 6P_3 + 6P_2 + P_1 = \Delta\,(6P_4 + 6P_3 + P_2) = \Delta \left(\dfrac{X^2(X-1)^2}{4} \right)$

c) On utilise les deux résultats précédents :

$$\sum_{k=0}^{p} k^j = \sum_{k=0}^{p} \Delta(Q_j)(k) = Q_j(p+1) - Q_j(0) = Q_j(p+1) \text{ car } Q_j(0) = 0$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p} k = \frac{p(p+1)}{2}, \sum_{k=0}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}, \sum_{k=0}^{p} k^3 = \left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2}$$

9.

a) Sans problème

$$\Delta(P)' = P'(X+1) - P'(X) = \Delta(P')$$

b) Si la suite B_n existe :

- $\forall n \geq 1$, $\Delta(B'_{n+1} - nB_n) = (\Delta(B_{n+1}))' - n\Delta(B_n) = (X^n)' - nX^{n-1} = 0$
  Donc $B_{n+1} - nB_n \in \operatorname{Ker}(\Delta)$.
- Pour $n \geq 1$ on a $\Delta(B_{n+1}) = X^n$ donc $B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X) = X^n$.
  Si on prend $X = 0$: $B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$
- On a $\Delta(X) = 1$, donc $\Delta(B_1 - X) = 0$, donc $\Delta(B_1 - X) \in \operatorname{Ker}(\Delta)$
  il existe une constante telle que $B_1 = X + Cste$.

D'où les 3 propriétés voulues.

c) On vérifie que

- si $B_1 = X + Cste$: $\Delta(B_1) = \Delta(X) = 1 = X^0$
- On suppose que $n \geq 1$ et $\Delta(B_n) = X^{n-1}$.
  On a $\Delta(B'_{n+1} - nB_n) = 0$ et donc $(\Delta(B_{n+1}))' = \Delta\left(B'_{n+1}\right) = n\Delta(B_n) = nX^n$
  On a donc en prenant une primitive : $\Delta(B_{n+1}) = X^{n+1} + K_n$ avec $K_n \in \mathbb{R}$
  La condition $B_{n+1}(0) = B_{n+1}(1)$ donne $\Delta(B_{n+1})(0) = 0$ et donc $K_{n+1} = 0$
- On a bien vérifié par récurrence que $\forall n, \Delta(B_{n+1}) = X^n$ si et seulement si : $\begin{cases} \forall n \geq 1 \text{ , } B'_{n+1} = nB_n \\ \forall n \geq 1 \text{ , } B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0) \\ B_1 \text{ est unitaire de degré 1} \end{cases}$

10. a) On suppose vrai les propriétés 1 et 3 et on montre l'équivalence des deux autres propriétés:

$$\forall n \geq 1, \int_0^1 B_n(t)dt = \int_0^1 \frac{B'_{n+1}(t)}{n} dt = \frac{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)}{n}$$

d'où le résultat.

b) On a successivement :

- $B_1 = X + k_1$ et comme $\displaystyle\int_0^1 B_1 = \frac{1}{2} + k_1 = 0$ on a $\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2}}$
- $B'_2 = B_1$ donc $B_2 = \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X}{2} + k_2$ avec la condition : $\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{4} + k_2 = 0$ et donc $k_2 = \dfrac{1}{6}$
  $\boxed{B_2 = \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X}{2} + \dfrac{1}{12}}$
- $B'_3 = 2B_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$: $B_3 = \dfrac{X^3}{3} - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X}{6} + k_3$ avec $\dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + k_3 = 0$
  $\boxed{B_3 = \dfrac{X^3}{3} - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X}{6}}$
- $B'_4 = 3B_3 = X^3 - \dfrac{3X^2}{2} + \dfrac{X}{2}$ donc $B_4 = \dfrac{X^4}{4} - \dfrac{X^3}{2} + \dfrac{X^2}{4} + k_\prime$ avec $\dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} + k_4 = 0$
  $\boxed{B_4 = \dfrac{X^4}{4} - \dfrac{X^3}{2} + \dfrac{X^2}{4} - \dfrac{1}{120}}$

b) On retrouve :

$$\sum_{k=0}^{p} k = \sum_{k=0}^{p} \Delta(B_2)(k) = B_2(p+1) - B_2(0) = \frac{p(p+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{p} k^2 = B_3(p+1) - B_3(0) = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{p} k^3 = B_4(p+1) - B_4(0) = \left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2$$

c) Vérifions par récurrence l'existence et l'unicité de la suite (B_n) et $B_n \in \mathbb{Q}_n[X]$

- $B_1 = X - \dfrac{1}{2}$ est un polynôme unique et ses coefficients sont rationnels
- Supposons qu'il existe un unique polynôme B_n et que $B_n \in \mathbb{Q}_n[X]$

  On peut donc écrire $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ avec pour tout k $b_k \in \mathbb{Q}$.

  La relation $B'_{n+1} = nB_n$ donne $B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{k+1} b_k X^{k+1} + c_{n+1}$ avec $\dfrac{n}{k+1} b_k \in \mathbb{Q}$

  la relation $\displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(t)dt$ donne $c_{n+1} = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{(k+1)(k+2)} b_k \in \mathbb{Q}$

  et donc $B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{k+1} b_k X^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{(k+1)(k+2)} b_k \in \mathbb{Q}_{n+1}[X]$

  On a donc trouvé un unique polynôme B_{n+1} et $B_{n+1} \in \mathbb{Q}_{n+1}[X]$

c) En utilisant Maple pour rédiger l'algorithme on peut proposer une procédure non récursive avec tableau :

```
> B:=proc(n) locan B,i,c ;
>    B[1]:=X-1/2;
>    for i from 1 to n-1 do
>       B[i+1]:=int(i*B[i],X);
>       c:=int(B[i+1],X=0..1);
>       B[i+1]:=B[i+1]-c;

>   od;
> end;
```