Corrigé de CCP PC 2008 Mathématiques 1

(première partie modifiée en ajoutant des exemples)

PARTIE I

I.1 La matrice $\underline{\mathrm{diag}\,(\lambda_1,...,\lambda_n)}$ est une matrice carrée réelle positive et symétrique d'ordre n et de valeurs propres $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$, comptées avec multiplicité.

I.2.a) Si la matrice est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormale. Comme les valeurs propres sont 0 et 1 On a $M = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$. On vérifie sans problème que $\underline{M^2 = M}$.

I.2.b) S est donc la matrice d'un projecteur symétrique, donc orthogonale. Il suffit donc de prendre pour S la matrice d'une projection orthogonale sur une droite qui n'est pas un axe. On peut prend $D = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. $\boxed{S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ convient}}$.

I.2.c) On ajoute 1 aux valeurs propres précédentes . $S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + I_2$ convient.

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ convient.}}$$

I.3 a) La matrice carrée M est symétrique , donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et est semblable à $\mathrm{diag}\,(-1,1)$, donc son polynôme caractéristique est :

$$\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - 1.$$

I.3 b) La trace est nulle donc les coefficients diagonaux sont nuls (puisqu'une somme de termes positifs est nulle ssi tous les termes le sont) et le déterminant vaut -1 . Donc $S = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ de polynôme caractéristique $\lambda^2 - b^2$. Comme $b \geq 0$ l'unique solution est la matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ convient}}$$

I.4 On construit S par blocs à partir de la matrice précédente. $\boxed{S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ est carrée réelle symétrique positive d'ordre 3, de valeurs propres : $-1, 0, 1$

I.5 De même : $\boxed{S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$ est carrée réelle symétrique positive d'ordre 4, de valeurs propres de S sont $-1,-1,1,1$ (avec multiplicité).

I.6 Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une matrice S carrée réelle symétrique positive .Elle admet 3 valeurs propre en taille 3 , le polynôme caractéristique est scindé et la trace est la somme des valeurs propres. La trace est aussi la somme des coefficients diagonaux . La trace est donc positive (car S est positive) .

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de matrice carrée réelle symétrique positive d'ordre 3 admettant pour valeurs propres } : -1,0,0}$$

I.7 a)

On calcule le polynôme caractéristique de H en faisant pour $\iota > 1$ $L_i - L_1 -> L_i$

$$\begin{aligned}
\chi_H(\lambda) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b & b & \cdots & b \\ b & a-\lambda & b & & b \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & b & a-\lambda & b \\ b & \cdots & b & b & a-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & b & \cdots & b \\ b-a+\lambda & a-b-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ b-a+\lambda & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a-b-\lambda & 0 \\ b-a+\lambda & 0 & \cdots & 0 & a-b-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (b-a-\lambda)^{n-1} \,|\text{ inutile de calculer plus}|
\end{aligned}$$

- $a-b$ est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$ .Sa somme des valeurs propres est la trace la dernière valeur propre est donc : $a + (n-1)b$.

  Les deux valeurs propres sont distinctes ssi $b \neq 0$

  $$\boxed{\text{Les valeurs propres de } H \text{ sont donc :} \begin{cases} a \text{ (de multiplicité } n) \text{ si } b = 0 \\ a + (n-1)b \text{(de multiplicité 1) et } a-b\text{(de multiplicité } n-1) \text{ si } b \neq 0 \end{cases}}$$

I.7 b)
On prend dans H, $b=-1$ et $a=n$. La matrice n'est pas positive ($b<0$) et les valeurs propres sont $n+1$ et 1 positives..

$\boxed{\text{Une matrice carrée réelle symétrique d'ordre } n>1 \text{ ayant toutes ses valeurs propres positives ou nulles n'est pas nécessairement positi}}$

PARTIE II

II.1 a) $(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY = {}^tYX$

II.1 b) D'après a) : ${}^tXSY = {}^tX(SY) = (X\,,SY)$ et ${}^tXSY = {}^tX\,{}^tSY = {}^t(SX)Y = (SX\,,Y)$.

$$\boxed{\forall\,(X,Y)\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2\,,\forall S\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,,(X,SY)=(SX,Y)={}^tXSX}$$

II.1 c) P est orthogonale donc ${}^tPP=I_n$ et donc avec les formules précédentes:

$$||PX||^2=(PX\,,PX)={}^t(PX)(PX)={}^tX({}^tPP)X={}^tXI_nX={}^tXX=||X||^2,$$

donc

$$\boxed{\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\,,\forall P\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})\,,\ \ ||PX||=||X||.}$$

II.2 a) On a, par produit par blocs :

$$(Z\,,T)_{n+p}={}^tZT=\left({}^tX,{}^tU\right)\begin{pmatrix}Y\\V\end{pmatrix}={}^tXY+{}^tUV=(X\,,Y)_n+(U\,,V)_p.$$

II.2 b) Si X,Y sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$ et si U,V sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^p$, alors :

$$(Z\,,T)_{n+p}=(X\,,Y)_n+(U\,,V)_p=0+0=0$$

donc Z,T sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^{n+p}$.

II.2 c) La réciproque est fausse,il suffit d'avoir $(X\,,Y)_n=-(U\,,V)_p\neq 0$ par exemple $X=Y=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_n$ $,V=-U=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_p$

II.3 a) D existe : toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base ON , et les λ_i sont les valeurs propres de S.
Il existe donc $P\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $S=PDP^{-1}=PD\,{}^tP$.
Si $Y=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a : $DY=\begin{pmatrix}\lambda_1y_1\\\vdots\\\lambda_ny_n\end{pmatrix}$ donc :

$$(DY\,,Y)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_iy_i)y_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iy_i^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha y_i^2=\alpha\sum_{i=1}^{n}y_i^2=\alpha||Y||^2.$$

Les inégalités $\lambda_i\leq\alpha$ sont bien multipliées par des réels positifs y_i^2 , donc pas de changement de sens.

$$\boxed{(DY\,,Y)\leqslant\alpha||Y||^2}$$

II.3 b) Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0\}$. Notons $Y={}^tPX$. On a d'après **1.c :** $\|Y\|=\|X\|$ et donc :

$$(SX,X)={}^tXSX={}^tXPD{}^tPX={}^tYDY=(DY,Y)\leq\alpha\,\|Y\|=\alpha\,\|X\|^2$$

d'où comme $\|X\|^2>0$

$$\boxed{\frac{(SX\,,X)}{||X||^2}\leqslant\alpha}$$

.

II.3 c) Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0\}$. Décomposons X sur une base orthonormale $\mathcal{B}=(V_1,...,V_n)$ de vecteurs propres de S (qui existe puisque S est symétrique réelle) :$X=\sum_{i=1}^{n}x_iV_i$. On a alors :

$$(SX,X)=(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_iV\ \ ,\sum_{i=1}^{n}x_iV_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^2\ \text{et}\ \alpha||X||^2=\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

On a l'égalité $(SX, X) = \alpha ||X||^2$ si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - \alpha)x_i^2 = 0$$

Une somme de termes négatifs est nul ssi tous les termes sont nuls.

$$\forall i\, [[1, n]]\ ,\ \alpha = \lambda_i \text{ ou } x_i = 0$$

Si $\alpha = \lambda_j$ on a $x_j\lambda_j V_j = \alpha x_j V_j$ et si $x_j = 0$ on a aussi $x_j\lambda_j V_j = \alpha x_j V_j$ (=0) et donc $SX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i V = \alpha X$

Réciproquement si $SX = \alpha X$ et $X \neq 0$ on a bien $\dfrac{(SX\,,X)}{||X||^2} = \alpha$

$$\boxed{\text{On a une égalité si et seulement si } X \text{ est un vecteur propre pour la valeur propre } \alpha}$$

II.4 a) $X \in E \Leftrightarrow \forall i \in [[1, n]]\ ,\ x_i \geq 0$. E est donc l'intersection des n demi plans fermés $x_i \geq 0$ donc un fermé de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
Rappel : chaque demi plan est fermé comme image réciproque du ferme $[0, +\infty[$ par l'application linéaire (donc continue) $X- > x_i$.
II.4 b) Σ est la sphère unité , c'est donc un compact (fermé comme image réciproque de $\{1\}$ par $X- > \|X\|$ continu et borné) .
C est donc fermé (intersection de 2 fermés) borné (sous ensemble d'un borné) donc compact.

$$\boxed{C \text{ est un compact de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

II.4 c) En notant $S = (s_{ij})_{ij}$ et $X = (x_i)_i$, on a :

$$\varphi(X) = {}^tXSX = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i s_{ij} x_j = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{ij} x_i x_j.$$

Il en résulte, par somme et produit de fonctions continues ($X- > x_i$) que φ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
II.4 d) Puisque φ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, à valeurs réelles, et que C est compact, $\varphi(C)$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc un bornée et ses bornes sont atteinte. . En particulier,$\mu = \sup(\varphi(X), X \in C)$ existe et il existe $X_0 \in C$ tel que $\varphi(X_0) = \mu$.
II.4 e) Comme $X_0 \in C \subset \Sigma$, on a $||X_0|| = 1$, d'où, d'après **II.3 b)** :$\mu = \varphi(X_0) = (SX_0\,, X_0) = \dfrac{(SX_0\,, X_0)}{||X_0||^2} \leqslant \alpha$.

$$\boxed{\mu = \sup(\varphi(X), X \in C) = \varphi(X_0) \leq \alpha}$$

II.5 a) i)par construction $W \in E$, et on a :$||W||^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = ||X||^2 = 1$,
donc $W \in \Sigma$, et on obtient : $W \in C$.
II.5 a) ii) On a, avec les notations de **I.4 c)** et en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |\varphi(X)| &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{ij} x_i x_j \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |s_{ij} x_i x_j| \\ &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j} |x_i x_j| \text{ car } S \text{ es positive} \\ &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{ij} |x_i, |x_j| = \varphi(W). \end{aligned}$$

II.5 a iii) Par définition de μ, comme $W \in C$, $\mu \geqslant \varphi(W)$, et donc d'après ii) : $\mu \geqslant |\varphi(X)|$.
Mais, puisque X est un vecteur propre associé à la valeur propre α de S, on a $SX = \alpha X$, donc :

$$\varphi(X) = {}^tXSX = {}^tX(\alpha X) = \alpha\, {}^tXX = \alpha ||X||^2 = \alpha.$$

On conclut :

$$\boxed{\mu \geqslant |\alpha|}$$

II.5 b) • D'après **II.4 e)** et **II.5 a) iii)**, on a : $\alpha \geqslant \mu \geqslant |\alpha| \geqslant 0$, donc : $\alpha \geqslant 0$ et $\mu = \alpha$
• Or $\varphi(W) = \dfrac{(SW\,, W)}{||W||^2} = \alpha$. D'après **II.3.c)** W est un vecteur propre associé à la valeur propre α et par construction W est positif.

$$\boxed{S \text{ admet un vecteur propre positif associé à la valeur propre } \alpha}$$

II.5 c) Soit $i \in \{1, ..., n\}$.
On procède ensuite avec λ_i comme avec α :il existe $X = (x_j)_{j=1}^n \in \Sigma$ vecteur propre tel que $SX = \lambda_i X$. On considère $W = (|x_{,j}|)_{j=1}^n$
On a toujours $W \in C$ et $|\varphi(X)| \leq \varphi(W) \leq \mu$. et donc comme $\mu = \alpha$; $|\varphi(X)| \leq \alpha$.
Mais $\varphi(X) =$ (SX_i, X)= $(\lambda_i X\ , X)$= $\lambda_i \|X\|^2 = |\lambda_i|$ .on a donc :

$$\boxed{i \in [[1, n]]\ ,\ |\lambda_i| \leqslant \alpha}$$

.*Remarque : on peut au moins dire que* $\lambda_i \leq \alpha$ par définition de α

PARTIE III

Les deux matrices sont symétriques réelles , d'où l'existence des deux BON proposées.
La matrice proposée existe et est diagonale par blocs : les matrices A et B sont diagonales , $Y_1{}^t X_1$ est le produit d'une matrice $p \times 1$ et d'une matrice $1 \times n$, c'est une matrice $p \times n$, autant de lignes que B et autant de colonnes que A .idem pour $X_1{}^t Y_1$. on pourra faire du calcul par blocs.
III.1
• Soit $i \in \{2, ..., n\}$. On a $Z_i \neq 0$ car $X_i \neq 0$, et $M_s Z_i = \begin{pmatrix} AX_i \\ sY_1{}^t X_1 X_i \end{pmatrix}$,or (X_i) est orthonormé donc pour $i \neq 1$, ${}^t X_1 X_i = (X_1 | X_i) = 0$ et par définition de X_i on a $AX_i = \alpha_i X_i$
donc

$$\boxed{\text{pour } i \geq 2\ Z_i \text{ est un vecteur propre de } M_s \text{ pour la valeur propre } \alpha_i}$$

.
• de même

$$\boxed{\text{pour } j \geq 2\ T_j \text{ est un vecteur propre de } M_s \text{ pour la valeur propre } \beta_j}$$

.
III.2 a) On a :

$$||V(\theta)||_{n+p}^2 = ||\cos(\theta) X_1||_n^2 + ||\sin(\theta) Y_1||_p^2 = \cos^2(\theta)||X_1||_n^2 + \sin^2(\theta)||Y_1||_p^2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1,$$

donc

$$\boxed{V(\theta) \text{ est unitaire dans } \mathbb{R}^{n+p}}$$

.
III.2 b) on reprend le calcul du **III.1** comme $s = 0$ la relation $sY_1{}^t X_1 X_i = 0$ est vérifiée même si $i = 1$, et donc Z_1 est vecteur propre associé à la valeur propre α_1 . Et de même T_1 pour β_1 .
On vérifie que $\{Z_i\}_{i=1}^n \cup \{T_j\}_{j=1}^p$ est une base de $\mathbb{R}^{n+p}$

$$\sum_{i=1}^n a_i Z_i + \sum_{j=1}^p b_j Tj = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{i=12}^n a_i X_i = 0 \\ \sum\limits_{j=1}^p b_j Y_j = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall i\ \text{a}_i = 0 \\ \forall j\ b_j = 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{Sp(M_0) = \{\alpha_1, \cdots \alpha_n, \beta_1, \cdots \beta_p\} \text{ avec multiplicité.}}$$

III.2 c) i) On a $\theta_1 \in \left]-\frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2}\right[$ intervalle de bijection de tan :

$$\begin{array}{rcl} \theta_1 & = & 0 \Longrightarrow \tan(\theta_1) = 0 \Longrightarrow \beta_1 - \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2} = 0 \\ \Longrightarrow & & \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2} = \alpha_1 - \beta_1 \Longrightarrow (\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2 = (\alpha_1 - \beta_1)^2 \Longrightarrow s = 0, \end{array}$$

or $s \neq 0$. donc

$$\boxed{\theta_1 \neq 0}$$

et donc $\theta_2 \in]0, \pi[- \{\pi/2\}$ et $\tan(\theta_2)$ existe
III.2 c) ii) On a :

$$\tan\ (\theta_1) \tan(\theta_2) = \tan(\theta_1) \tan\ (\theta_1 + \frac{\pi}{2}) = \tan\ (\theta_1)\ (-co\tan\ (\theta_1)) = -1$$

.
III.2 c) iii) On reconnaît dans $\tan(\theta_1)$ la relation $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ qui donne une racine de $ax^2 + bx + c = 0$. avec $a = s$, $b = (\alpha_1 - b_1)$, $c = -s$: et donc $\tan(\theta_1)$ est racine de $sX^2 + (\alpha_1 - \beta_1) X - s = 0$.

Pour cette équation le produit des racines est $-\dfrac{c}{a} = -1$. l'autre racine est donc $\dfrac{-1}{\tan(\theta_1)} = \tan(\theta_2)$.

On vérifie que $\alpha_1 + s\,X = \beta_1 + \dfrac{s}{X} \Longleftrightarrow sX^2 + (\alpha_1 - \beta_1)\,X - s = 0$ (pour $X \neq 0$, ce qyui est le cas des racines $\tan(\theta_1)$ et $\tan(\theta_2)$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \theta_1 \text{ et } \theta_2 \text{ vérifient l'équation } \alpha_1 + s\,\tan\theta = \beta_1 + \frac{s}{\tan\theta}}$$

et (ce qui est le plus important pour la suite) $\tan(\theta_2)$ est l'autre racine du trinôme du second degré donc

$$\tan(\theta_2) = \frac{\beta_1 - \alpha_1 - \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2}}{2s}$$

III.2 c) iv) On a pour $k \in [[1,2]]$

$$M_s V(\theta) = \begin{pmatrix} A & sX_1{}^tY_1 \\ sY_1{}^tX_1 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_k)\,X_1 \\ \sin(\theta_k)\,Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k)\,AX_1 + s.\sin(\theta_k)\,X_1{}^tY_1Y_1 \\ \cos(\theta_k)\,sY_1{}^tX_1X_1 + \sin(\theta_k)\,BY_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_k)\,\alpha_1X_1 + s.\sin(\theta_k)\,X_1.1 \\ \cos(\theta_k)\,sY_1.1 + \sin(\theta_k)\,\beta_1Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\alpha_1 + s.\tan(\theta_k)]\,[\cos(\theta_k)\,X_1] \\ \left[\dfrac{s}{\tan(\theta_k)} + \beta_1\right][\sin(\theta_k)\,Y_1] \end{pmatrix}$$

Or $\alpha_1 + s.\tan(\theta_1) = \dfrac{1}{2}\left(\alpha_1 + \beta_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2}\right)$
et $\dfrac{s}{\tan(\theta_1)} + \beta_1 = \beta_1 - s\tan(\theta_2) = \dfrac{1}{2}\left(\alpha_1 + \beta_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2}\right)$
Donc pour $\boxed{\mu_1 = \dfrac{1}{2}\left(\alpha_1 + \beta_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2}\right)}$

$$M_s V(\theta_1) = \mu_k V(\theta_1).$$

et de même avec $\boxed{\mu_2 = \dfrac{1}{2}\left(\alpha_1 + \beta_1 - \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2}\right)}$
D'autre part, $V(\theta_k) \neq 0$, car $V(\theta_k)$ est unitaire, cf. **III.2 a)**.

$$\boxed{V(\theta_k) \text{ est un vecteur propre de } M_s \text{ et la valeur propre correspondante est } \mu_k \text{ défini ci dessus}}$$

III.2 c) v) on étudie la famille : $F = \{V(\theta_1),\, V(\theta_2),\, Z_2, Z_3, ..., Z_n,\, T_2, T_3, ..., T_p\}$

•

$$(V(\theta_1)\,, V(\theta_2))_{n+p} = (\cos(\theta_1))(\cos(\theta_2))(X_1\,, X_1)_n + (\sin(\theta_1))(\sin(\theta_2))(Y_1\,, Y_1)_p$$
$$= \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

et donc :

$$V(\theta_1) \perp V(\theta_2)$$

• Pour tout $i \in [[2,n]]$ et $k \in [[1,2]]$:$(V(\theta_k)\,, Z_i)_{n+p} = (\cos\theta)(X_1\,, X_i)_n + (\sin\theta_k)(X_1\,, 0)_p = 0$, car $X_1 \perp X_i$

$$V(\theta_k) \perp Z_i$$

et, de même : .

$$V(\theta_k) \perp T_j$$

• On vérifie de même

$$\forall\{i,j\}\ ,\ Z_i \perp T_j$$
$$i \neq j \Rightarrow Z_i \perp Z_j \text{ et } T_i \perp T_j$$

• On a déjà vu que $V(\theta_1)$ et $V(\theta_2)$ sont unitaires, cf. **III.2 a)**.
• pour tout $i \in \{2,...,n\}$, $||Z_i||_{n+p}^2 = ||X_i||_n^2 = 1$ et, pour tout $j \in \{2,...,p\}$, $||T_j||_{n+p}^2 = ||Y_j||_p^2 = 1$.
• Enfin F a $n+p$ éléments et $\dim(\mathbb{R}^{n+p}) = n+p$.
On conclut que F est une base orthonormale de $\mathbb{R}^{n+p}$.

$$\boxed{\text{les valeurs propres (avec multiplicité sont : } \mu_1, \mu_2,\ \alpha_2,...,\alpha_n,\ \beta_2,...,\beta_p}.$$

III.2 c) vi) Si $s=0$ on a :

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{1}{2}\left(\alpha_1+\beta_1+\sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2+0}\right)=\frac{1}{2}\left(\alpha_1+\beta_1+|\alpha_1-\beta_1|\right)\\ \mu_2 &= \frac{1}{2}\left(\alpha_1+\beta_1-\sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2+0}\right)=\frac{1}{2}\left(\alpha_1+\beta_1-|\alpha_1-\beta_1|\right)\end{aligned}$$

On a donc $\mu_1=\alpha_1, \mu_2=\beta_1$ ou $\mu_2=\alpha_1, \mu_1=\beta_1$ selon le signe de $\alpha_1-\beta_1$. Les autres valeurs propres sont les mêmes de façon évidente.

PARTIE IV

IV.1 Soit $\lambda_1\in\mathbb{R}$ tel que $\lambda_1\geqslant 0$. La matrice $A=(\lambda_1)$ est élément de $\mathbf{S}_1(\mathbb{R}^+)$ de valeur propre λ_1.
Ainsi, (P_1) est trivialement vraie.
IV.2 a) On a

$$: a=\lambda_1+\lambda_{n+1}\geqslant -(\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\geqslant 0$$

car les λ_i sont négatifs pour $i\geq 2$. On a aussi

$$a+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=(\lambda_1+\lambda_{n+1})+(\lambda_2+\cdots+\lambda_n)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n+\lambda_{n+1}\geqslant 0.$$

$(a,\, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ vérifie :$a\geqslant 0\geqslant\lambda_2\geqslant ...\geqslant\lambda_n$ et $a+\lambda_2+\cdots\lambda_n\geqslant 0$.
D'après (P_n), il existe $A\in\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $a, \lambda_2, ..., \lambda_n$ soient les valeurs propres de A, avec multiplicité.
IV.2 b) D'après **II.5 b)** comme $A\in\mathbf{S}_n(\mathbb{R}^+)$ et que a est la plus grande valeur propre., A admet un vecteur propre unitaire positif associé à la valeur propre a.
IV.2 c) i) Si on pose $p=1$, $B=(0)$, (qui est bien une matrice carrée réelle symétrique), et $Y_1=(1)$, (qui est bien un vecteur propre unitaire de B). on a bien que la matrice M_s proposée est de la forme **(1)** de la partie **III**.
IV.2 c) ii) • Avec les notations de **III.2**, on a :$\alpha_1=a,\ \alpha_2=\lambda_2, ..., \alpha_n=\lambda_n,\ \beta_1=0$
On a donc : :

$$\tan\theta_1=\frac{-a+\sqrt{a^2+4s^2}}{2s}, \tan\theta_2=\frac{-a-\sqrt{a^2+4s^2}}{2s}$$

$$\mu_1=\alpha_1+s\tan\theta_1==\frac{a+\sqrt{a^2+4s^2}}{2},\ \text{ et }\ \mu_2=\frac{a-\sqrt{a^2+4s^2}}{2}.$$

La liste des valeurs propres de M_s, avec multiplicité, est donc :

$$\frac{a+\sqrt{a^2+4s^2}}{2},\ \frac{a-\sqrt{a^2+4s^2}}{2},\ \lambda_2, ..., \lambda_n.$$

IV.2 c) iii) Prenons $s=\sqrt{-\lambda_1\lambda_{n+1}}$, ($-\lambda_1\lambda_{n+1}\geqslant 0$ d'après les hypothèses sur les λ_i) . On a alors :

$$\sqrt{a^2+4s^2}=\sqrt{(\lambda_1+\lambda_{n+1})^2+4(-\lambda_1\lambda_{n+1})}=|\lambda_{n+1}-\lambda_1|$$

or $\lambda_1\geqslant\lambda_{n+1}$ donc : $\sqrt{a^2+4s^2}=\lambda_1-\lambda_{n+1}$ et donc

$$\frac{a+\sqrt{a^2+4s^2}}{2}=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_{n+1}+\lambda_1-\lambda_{n+1})=\lambda_1,\ \text{ et }\ \frac{a-\sqrt{a^2+4s^2}}{2}=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_{n+1}-\lambda_1+\lambda_{n+1})=\lambda_{n+1}.$$

On conclut que, pour ce choix de s, les valeurs propres de M_s sont : $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}$.
Donc il existe A (égale à M_s) dans $\mathbf{S}_{n+1}(\mathbb{R}^+)$ telle que les valeurs propres de A, (avec multiplicité) soient : $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}$, (P_{n+1}) est vérifié
Par récurrence sur n.

$$\boxed{(P_n)\text{ est vraie pour tout } n\in\mathbb{N}^*}$$

IV.3 a) On remarque d'abord que la matrice A proposée est carrée réelle d'ordre 3, positive et symétrique.
On calcule le polynôme caractéristique de A :(on commence par L_1-L_2 pour avoir le facteur $-\lambda-1$)

$$\chi_A(\lambda)=(6-\lambda)(-3-\lambda)(-1-\lambda)$$

On conclut :

$$\boxed{Sp(A)=\{-3,\,-1,\,6\}}$$

.
IV.3 b) On a $6=9-3$ et on peut appliquer la méthode de la récurrence avec les λ_i .
Avec les notations de **IV.2** :

$$n=3,\ a=\lambda_1+\lambda_4=6,\ s=\sqrt{-\lambda_1\lambda_4}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.$$

Après calcul on trouve que $X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre unitaire de A associé à la valeur propre $a = 6$.

La matrice M_s construite en **IV.2 c)** convient et on a :

$$M_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$