
N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Notations et objectifs

Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{R} et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients dans \mathbb{R} .

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice identité d'ordre n .

Tout vecteur $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de \mathbb{R}^n est identifié à un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de X soit x_i . Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ aussi bien que le vecteur de \mathbb{R}^n qui lui est associé.

Selon le contexte, 0 désigne soit le réel nul, soit la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit encore la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

\mathbb{R}^n est muni de son produit scalaire canonique noté $(\cdot | \cdot)_n$ et de la norme associée $\| \cdot \|_n$.

Une matrice carrée réelle M sera dite positive si tous ses coefficients sont positifs ou nuls, et on notera dans ce cas $M \geq 0$. De même un vecteur X de \mathbb{R}^n sera dit positif si toutes ses composantes x_i sont positives ou nulles et on notera aussi $X \geq 0$. L'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n , positives et symétriques est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}_+)$.

L'objectif de ce problème est d'étudier des conditions pour lesquelles, étant donnés n nombres réels distincts ou non $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, il existe une matrice carrée réelle d'ordre n positive et symétrique admettant pour valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité, c'est à dire dont le polynôme caractéristique est égal à $\prod_{k=1}^n (\lambda_k - X)$.

Dans la première partie on considérera quelques exemples simples.

Dans la seconde partie, on montrera que si S est une matrice carrée réelle positive et symétrique de plus grande valeur propre α , alors α est positif, S admet pour la valeur propre α un vecteur propre positif et toute valeur propre λ de S vérifie $|\lambda| \leq \alpha$.

La troisième partie, assez technique, permettra de connaître les valeurs propres d'une matrice carrée réelle positive et symétrique d'ordre $n + p$ construite à partir de deux matrices A et B carrées réelles positives et symétriques d'ordres respectifs n et p dont on connaît les valeurs propres.

Enfin la dernière partie donnera des conditions suffisantes pour qu'il existe une matrice carrée réelle positive et symétrique d'ordre n admettant pour valeurs propres comptées avec multiplicité n réels donnés.

Partie I

I.1. Montrer que si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des réels positifs, distincts ou non, il existe une matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre n et de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité.

I.2.

- (a) Soit M une matrice carrée symétrique réelle d'ordre 2 admettant 0 et 1 pour valeurs propres. Montrer que $M^2 = M$
- (b) En déduire une matrice S carrée réelle positive et symétrique non diagonale d'ordre 2 admettant pour valeurs propres 0 et 1.

- (c) En déduire une matrice S carrée réelle positive et symétrique non diagonale d'ordre 2 admettant pour valeurs propres 1 et 2.

I.3.

- (a) Soit M une matrice carrée symétrique réelle d'ordre 2 admettant -1 et 1 pour valeurs propres. Montrer que son polynôme caractéristique P est donné par $P(X) = X^2 - 1$.
 (b) En déduire qu'il existe une unique matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 2 admettant pour valeurs propres -1 et 1 . Déterminer S .

I.4. Déterminer une matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 3 admettant pour valeurs propres $-1, 0, 1$.

I.5. Déterminer une matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 4 admettant pour valeurs propres comptées avec multiplicité : $-1, -1, 1, 1$.

I.6. Montrer qu'il n'existe aucune matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 3 admettant pour valeurs propres comptées avec multiplicité : $-1, 0, 0$.

I.7. On suppose dans cette question $n > 1$

- (a) Pour a et b réels, on note H la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients diagonaux valent tous a et les autres valent b . Déterminer les valeurs propres de H .
 (b) Une matrice carrée réelle symétrique d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles est-elle nécessairement positive ?

Partie II

II.1. Soit $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $S \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Etablir les égalités :

- (a) $(X|Y)_n = {}^tXY = {}^tYX$.
 (b) ${}^tXS Y = (X|SY)_n = (SX|Y)_n$.
 (c) $\|PX\|_n = \|X\|_n$

II.2. Soit $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ et $(U, V) \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}))^2$. On note Z et T les matrices de $\mathcal{M}_{n+p,1}(\mathbb{R})$ définies par blocs sous la forme

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} Y \\ V \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que $(Z|T)_{n+p} = (X|Y)_n + (U|V)_p$.
 (b) Montrer que si X et Y sont orthogonaux dans \mathbb{R}^n et U, V orthogonaux dans \mathbb{R}^p , Z et T sont orthogonaux dans \mathbb{R}^{n+p} .
 (c) La réciproque est-elle vraie ?

Dans la suite de cette partie S désigne une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale semblable à S . On pose $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$.

II.3.

- (a) Montrer que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(DY|Y)_n \leq \alpha \|Y\|_n^2$.
 (b) En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\frac{(SX|X)_n}{\|X\|_n^2} \leq \alpha$
 (c) En utilisant une décomposition du vecteur X sur une base orthonormée de vecteurs propres de S , montrer que cette dernière inégalité est une égalité si et seulement si X est un vecteur propre de S associé à la valeur propre α .

II.4. Les 5/2 peuvent chercher à traiter la question . Les 3/2 peuvent admettre que $\sup_{X \in C} \varphi(X) \leq \alpha$

(le cours correspondant sera abordé au retour des vacances)

Soit $E = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid X \geq 0\}$, $\Sigma = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \|X\|_n = 1\}$, et $C = E \cap \Sigma$.

- Montrer que E est un fermé de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Montrer que C est un fermé borné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Soit $\varphi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \longmapsto (SX|X)_n$. Donner l'expression de $\varphi(X)$ en fonction des coefficients de S et de ceux de X ; en déduire que φ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- On pose $\mu = \sup_{X \in C} \varphi(X)$. Justifier l'existence de μ et montrer qu'il existe X_0 appartenant à C tel que $\varphi(X_0) = \mu$.
- Montrer que $\mu \leq \alpha$.

II.5. On suppose dans cette question que $S \geq 0$.

- Si $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un vecteur propre unitaire de S associé à la valeur propre α , on pose $W = (|x_i|)_{1 \leq i \leq n}$.
 - Montrer que W est élément de C .
 - Montrer que $|\varphi(X)| \leq \varphi(W)$.
 - Montrer que $|\alpha| \leq \mu$.
- En déduire $\alpha \geq 0$, puis que la matrice S admet un vecteur propre positif associé à la valeur propre α .
- Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $|\lambda_i| \leq \alpha$.

Partie III

Soit n et p deux éléments de \mathbb{N}^* , A, B deux matrices symétriques réelles d'ordres respectifs n et p , (X_1, X_2, \dots, X_n) une base orthonormée de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de A , (Y_1, Y_2, \dots, Y_p) une base orthonormée de \mathbb{R}^p formée de vecteurs propres de B et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ les réels tels que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, AX_i = \alpha_i X_i \text{ et } \forall j \in \{1, 2, \dots, p\}, BY_j = \beta_j Y_j$$

Pour tout réel s , on note M_s la matrice de $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$ donnée sous forme de blocs par :

$$M_s = \begin{pmatrix} A & sX_1^t Y_1 \\ sY_1^t X_1 & B \end{pmatrix} \quad (1)$$

et on considère les vecteurs $(Z_i)_{1 \leq i \leq n}$ de \mathbb{R}^{n+p} définis par $Z_i = \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix}$, ainsi que les vecteurs $(T_j)_{1 \leq j \leq p}$ de \mathbb{R}^{n+p} définis par $T_j = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_j \end{pmatrix}$.

III.1. Montrer que Z_2, Z_3, \dots, Z_n et T_2, T_3, \dots, T_p sont vecteurs propres de M_s et préciser les valeurs propres correspondantes.

III.2. Pour θ réel, on note $V(\theta)$ le vecteur défini par $V(\theta) = \begin{pmatrix} (\cos \theta)X_1 \\ (\sin \theta)Y_1 \end{pmatrix}$

- Montrer que $V(\theta)$ est unitaire dans \mathbb{R}^{n+p} .

- (b) Déterminer le spectre de M_0 .
- (c) On suppose dans cette question $s \neq 0$. On note θ_1 l'unique réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$\tan \theta_1 = \frac{\beta_1 - \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2}}{2s}$$

et on pose $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$.

- i. Montrer que θ_1 est non nul.
- ii. Simplifier le produit $(\tan \theta_1)(\tan \theta_2)$.
- iii. Montrer que θ_1 et θ_2 vérifient l'équation :

$$\alpha_1 + s \tan \theta = \beta_1 + \frac{s}{\tan \theta} \quad (2)$$

- iv. En déduire que $V(\theta_1)$ et $V(\theta_2)$ sont vecteurs propres de M_s et exprimer les valeurs propres correspondantes μ_1 et μ_2 en fonction de α_1 , β_1 et s .
- v. Montrer que les vecteurs $V(\theta_1), V(\theta_2), Z_2, Z_3, \dots, Z_n, T_2, T_3, \dots, T_p$ forment une base orthonormée de \mathbb{R}^{n+p} et donner l'ensemble des valeurs propres de M_s .
- vi. Montrer que les formules exprimant μ_1 et μ_2 en fonction de α_1 , β_1 et s donnent encore des valeurs propres de M_s lorsque $s = 0$.

Partie IV

Dans cette partie on se propose de démontrer par récurrence la propriété (P_n) suivante : si $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ est un élément de \mathbb{R}^n tel que :

$$\lambda_1 \geq 0 \geq \lambda_2 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \geq 0$$

alors il existe $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}_+)$ tel que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ soient les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

IV.1. Vérifier que (P_1) est vraie.

IV.2. Soit $n \in \mathbb{B}^*$ tel que (P_n) soit vraie et soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant :

$$\lambda_1 \geq 0 \geq \lambda_2 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \lambda_{n+1} \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1} \geq 0$$

On pose $a = \lambda_1 + \lambda_{n+1}$.

- (a) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}_+)$ tel que $a, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ soient les valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Dans la suite de cette question **IV.2**, A désignera une telle matrice.
- (b) Montrer que A admet un vecteur propre X_1 unitaire positif associé à la valeur propre a .
- (c) Pour s réel, soit M_s la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{pmatrix} A & sX_1 \\ s^t X_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- i. Vérifier que M_s est de la forme (1) : préciser p , B et Y_1 .
- ii. En déduire les valeurs propres de M_s .

-
- iii. Montrer que si $s = \sqrt{-\lambda_1 \lambda_{n+1}}$, les valeurs propres de M_s sont : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ et conclure.

IV.3. Exemple

- (a) Déterminer le spectre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
- (b) Déterminer une matrice B carrée réelle positive et symétrique d'ordre 4, admettant pour valeurs propres $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \lambda_4 = -3$