CCP
PSI Math 1
2009

1. Etude de la fonction φ.

1.1. Pour $t>0$ on a $1-\cos(t)\geq 0$ et $t>0$ donc $0\leq \dfrac{1-\cos(t)}{t}$.

d est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $d'(t)=1-\sin(t)\geq 0$. d est donc croissante sur $\mathbb{R}$ on a donc pour $t\geq 0$: $d(t)\geq d(0)=0$ Soit $t\geq 1-\cos(t)$. On divise par $t>0$

$$\boxed{\forall t>0,\ 0\leq \frac{1-\cos(t)}{t}\leq 1}$$

Remarque : c'est un majorant mais pas le sup.

1.2. Pour $t>0$ on a bien $0\leq \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$

δ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\delta'(t)=t-\sin(t)\geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+$$

En particulier

δ' est positive sur $\mathbb{R}^+$ donc δ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $\delta(0)=0$, $\delta\geq 0$.

Ce qui donne $1-\cos(t)\leq \dfrac{t^2}{2}$. soit en divisant par $t^2>0$:

$$\boxed{\forall t>0,\ 0\leq \frac{1-\cos(t)}{t^2}\leq \frac{1}{2}}$$

Remarque :ici 1/2 est la limite en 0 donc est le sup.

2.

- $t\to \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue positive sur $\mathbb{R}^{+*}$
- Sur $]0,1]$ On a une fonction majorée par $1/2$ d'après la question précédente. Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}dt$ converge . Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$converge .
- Sur $[1,+\infty[$, on a $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\leq \dfrac{2}{t^2}$ avec $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ qui converge. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ converge.

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}dt\text{converge}}$$

On a même prouvé que $t\to \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ ce qui servira dans la suite.

Si $x\geq 0$, $t\to \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$ est continue positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}\leq \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$. Par majoration $\boxed{\varphi(x)\text{ existe sur }\mathbb{R}^+}$

Et on a même prouvé l'intégrabilité pour tout $x\geq 0$ de $t\to \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$

3.1. On a :

$$\varphi(x_1)-\varphi(x_2)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}(e^{-x_1t}-e^{-x_2t})\,dt$$

Si $x_1\leq x_2$, la fonction $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}(e^{-x_1t}-e^{-x_2t})$ est positive sur $\mathbb{R}^+$ et les bornes sont dans le bons sens. On a donc

$$\boxed{0\leq x_1\leq x_2\Rightarrow \varphi(x_1)\geq\varphi(x_2)}$$

. φ est décroissante minorée par 0; elle admet donc une limite finie en $+\infty$.

3.2. D'après **I.1.2** on a comme $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$ converge :

$$\forall x>0,\ 0\le \varphi(x)\le \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt=\frac{1}{2x}$$

Par encadrement, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0}$$

4.1. Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- $\forall x\ge 0,\ t\to \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$ est continue intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (question **I.2)**
- $\forall t>0,\ x\to \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
- On a domination sur $[0,+\infty[$: $\forall x\ge 0,\ \forall t>0,\ \left|\frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}\right|\le \frac{1-\cos(t)}{t^2}$. Le majorant est indépendant de x et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (question **I.2)**

  Ainsi, $\underline{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}$

4.2. Il s'agit d'utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

- $\forall t>0,\ x\to \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $x\to -\frac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}$
- $\forall x\ge 0,\ t\to \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$ est continue intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $t\to -\frac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- On domine sur tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$ en utilisant **I.1.1**: $\forall x\in[a,b],\forall t>0$, $\left|-\frac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}\right|\le e^{-at}$. Le majorant est indépendant de x et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car $a>0$).

  La majoration prouve l'intégrabilté de $t\to -\frac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}$ et la domination de la dérivée sur tout segment.

  φ est ainsi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\boxed{\forall x>0,\ \varphi'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}\,dt}$$

4.3. D'après **I.1.1** on a

$$\forall x>0,\ 0\le -\varphi'(x)\le \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt=\frac{1}{x}$$

Par encadrement, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\varphi'(x)=0}$$

4.4. Il s'agit à nouveau d'utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres à φ' :

- $\forall t>0,\ x\to -\frac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $x\to(1-\cos(t))e^{-xt}$
- $\forall x>0,\ t\to -\frac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}$ est continue intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (**I.4.2**) et $t\to(1-\cos(t))e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- On domine sur tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$: $\forall x\in[a,b],\forall t>0$, $\left|(1-\cos(t))e^{-xt}\right|\le 2e^{-at}$. Le majorant est indépendant de x et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car $a>0$).

  La majoration prouve ll'intégrabilté de $t\to(1-\cos(t))e^{-xt}$ et la domination de la dérivée sur tout segment.

  φ est ainsi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\boxed{\forall x>0,\ \varphi''(x)=\int_0^{+\infty}(1-\cos(t))e^{-xt}\,dt}$$

Remarque :on peut aussi appliquer le théorème C^2 à φ

4.5. On peut calculer $\displaystyle\int_0^X \cos(t)\exp(-xt)dt$ par double intégration par partie. Il est plus simple de passer par les complexes : On a

- $\displaystyle\int_0^X e^{-xt}dt = \frac{1-e^{-xX}}{x}$ (car $x \neq 0$) et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$
- $\cos(t) = \mathrm{Re}(e^{it})$ et donc

$$\begin{aligned}\int_0^X \cos(t)e^{-xt}\,dt &= \mathrm{Re}\left(\int_0^X e^{t(i-x)}dt\right)\\ &= \mathrm{Re}\left[\frac{e^{X(i-x)}}{i-x} - \frac{1}{i-x}\right]\end{aligned}$$

En faisant tendre X vers $+\infty$ on obtient comme $\left|\dfrac{e^{X(i-x)}}{i-x}\right| = \dfrac{e^{-xX}}{\sqrt{1+x^2}}$ de limite nulle (car $x>0$) : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(t)e^{-xt}\,dt = -\mathrm{Re}\left(\frac{1}{i-x}\right.$

$$\boxed{\forall x>0,\ \varphi''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}}$$

4.6. En prenant une primitive

$$\forall x>0,\ \varphi'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + cste = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) + cste$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $cste = 0$ et donc

$$\boxed{\forall x>0,\ \varphi'(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)}$$

On remarque que

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi'(x) = -\infty$$

φ n'est pas dérivable en 0 (son graphe admet en 0^+ une demi-tangente verticale.)

5.1. On a

$$x\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) = x\ln\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right) \sim_{x\to+\infty} -\frac{x}{x^2+1} \longrightarrow_{x\to+\infty} 0$$

5.2. On cherche la primitive nulle en 0.
Une intégration par parties donne en prenant $u(t) = \ln(t^2+1)$ et $v(t) = t$ fonctions C^1 sur $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt &= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt\\ &= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x 1-\frac{1}{1+t^2}\,dt\\ &= x\ln(1+x^2) - 2(x-\arctan(x))\end{aligned}$$

5.3. en intégrant l'expression $\varphi' = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$, il existe une constante telle que :

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ \varphi(x) &= x\ln(x) - x - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) + x - \arctan(x) + cste\\ &= \frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) - \arctan(x) + cste\end{aligned}$$

Si on fait tendre x vers $+\infty$ on a $\lim\left(x\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)\right) = 0$ (d'après **I.5.1**) et $\lim\varphi(x) = 0$ (d'après **I.3.2)** on obtient $cste = \pi/2$ et donc

$$\boxed{\forall x>0,\ \varphi(x) = \frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) + \frac{\pi}{2} - \arctan(x)}$$

5.4. Or φ est continue en 0^+, et donc :

$$\varphi(0) = \lim_{x\to 0^+}\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$$

2. Etude de l'existence de J_m.

1. $t \to \dfrac{(\sin(t))^m}{t}$ est continue sur $]0,\pi/2]$

- pour $m=1$ $\lim\limits_{0}\left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)=1$
- pour $m>1$ $\lim\limits_{0}\dfrac{(\sin(t))^m}{t}=0$

   Pour $m \geq 1$, la fonction admet une limite fine en 0 et est donc intégrable sur $[0,\pi/2]$

2. Une intégration par parties en posant $u=\dfrac{1}{t}$, $v=1-\cos(t)$ donne

$$\int_\varepsilon^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{1-\cos(x)}{x} - \frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^x \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$$

   On a $\left|\dfrac{1-\cos(x)}{x}\right| \leq \dfrac{2}{x}$, donc $\lim\limits_{+\infty}\left(\dfrac{1-\cos(x)}{x}\right)=0$ et $\dfrac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon} \sim_0 \dfrac{\varepsilon}{2}$. Donc comme $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$ converge (**I.2**) $\displaystyle\int_\varepsilon^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ admet une limite finie si ε tend vers 0 et x vers $+\infty$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$ converge et en opérant les passages à la limite on obtient :

$$J_1 = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt = \varphi(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}}$$

3. La fonction $t \to \dfrac{e^{ikt}}{t}$ est continue sur $[\pi/2,+\infty[$

- si $k \neq 0$: $u(t)=1/t$ et $v(t)=\dfrac{e^{ikt}}{ik}$, sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\pi/2,+\infty[$. donc par intégration par partie :

$$\forall k \neq 0,\quad \int_{\pi/2}^x \frac{e^{ikt}}{t}\,dt = \frac{e^{ikx}}{ikx} - \frac{2e^{ik\pi/2}}{ik\pi} + \int_{\pi/2}^x \frac{e^{ikt}}{ikt^2}\,dt$$

   Comme $\left|\dfrac{e^{ikt}}{ikt^2}\right| \leq \dfrac{1}{|k|t^2}$ avec $2>1$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{e^{ikt}}{ikt^2}\,dt$ converge . De plus $\lim\limits_{x->+\infty}\left(\dfrac{e^{ikx}}{ikx}\right)=0$; donc le membre de droite admet une limite quand $x \to \infty$. .

   Donc $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{e^{ikt}}{t}\,dt$ converge

- Si $k=0$ $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{1}{t}\,dt$ diverge.

$$\boxed{\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{e^{ikt}}{t}\,dt \text{ converge si et seulement si } k \in \mathbb{Z}^*}$$

4.1. D'après la formule d'Euler :$\sin(t)=\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$ et donc :

$$\sin(t)^m = \frac{(e^{it}-e^{-it})^m}{(2i)^m} = \frac{1}{(2i)^m}\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}(-e^{-it})^k\left(e^{it}\right)^{n-k} = \frac{1}{(2i)^m}\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}(-1)^k e^{i(m-2k)t}$$

Et donc :

$$\forall x \in [\pi/2,+\infty[\,,\quad \int_{\pi/2}^x \frac{\sin(t)^m}{t}\,dt = \frac{1}{(2i)^m}\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}(-1)^k I_{m-2k}(x)$$

4.2. Si $m=2p+1$, alors pour tout k entier $m-2k$ est non nul. D'après la question **II.3** toutes les intégrales I_{m-2k} convergent et donc $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin^m(t)}{t}\,dt$ converge . D'après la question **II.1** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(t)^m}{t}dt$converge et donc ,$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)^m}{t}\,dt$ converge.

4.3. Pour $m = 2p$, toutes les intégrales I_{m-2k} convergent sauf si $k = p$.L'expression précédente est donc la somme d'une fonction ayant une limite finie et d'une seule n'ayant pas de limite finie et donc $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)^m}{t}\, dt$ diverge . Donc aussi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t)^m}{t}\, dt$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^m}{t}\, dt \text{ converge si et seulement si } m \text{ est impair}}$$

3. Calcul de J_{2p+1}.

1.1. La fonction h_x est continue sur $]-\pi,\pi]$ et $h_x(-\pi^+) = h_x(\pi)$, donc h_x est continue sur le segment $[-\pi,\pi]$: les intégrales existent.

- La fonction h_x est paire :

$$\forall n,\ b_n(h_x) = 0$$

- par parité on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n(h_x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{\pi}t\right)\cos(nt)\, dt$$

On linéarise : $2\cos(\frac{x}{\pi}t)\cos(nt) = \cos\left(\left(\frac{x}{\pi}+n\right)t\right) + \cos\left(\frac{x}{\pi}-n\right)$. Et donc

$$a_n(h_x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(x+n\pi)}{x/\pi+n} + \frac{\sin(x-n\pi)}{x/\pi-n}\right) = (-1)^n\sin(x)\left(\frac{1}{x+n\pi}+\frac{1}{x-n\pi}\right)$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ a_n(h_x) = \frac{(-1)^n 2x\sin(x)}{x^2-n^2\pi^2}}$$

1.2. On a déjà vu que h_x est continue sur la période $[-\pi,\pi]$ donc sur $\mathbb{R}$. De plus h_x est dérivable sur $]-\pi,\pi]$ et la dérivée admet une limite à droite en $-\pi$, donc h_x est continue C^1_{pm} sur $\mathbb{R}$; sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est h_x et donc (n'oubliez pas le $\frac{a_{à}}{2}$)

$$\forall t\in\mathbb{R},\ h_x(t) = \frac{\sin(x)}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2x\sin(x)}{x^2-n^2\pi^2}\cos(nt)$$

On prend la valeur en 0 :

$$\boxed{\frac{\sin(x)}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2x\sin(x)}{x^2-n^2\pi^2} = 1}$$

2.1. f étant continue sur le segment $[-1,1]$ est bornée sur ce segment. On pose $M_0 = \sup_{[-1,1]}(|f|)$ et

$$|\gamma_n| \le M_0\int_{\pi/2+(n-1)\pi}^{\pi/2+n\pi}\frac{dt}{t} = M_0\ln\left(\frac{\pi/2+n\pi}{\pi/2+(n-1)\pi}\right)$$

Comme $\lim_{+\infty}\left(\frac{\pi/2+n\pi}{\pi/2+(n-1)\pi}\right) = 1$ on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(\gamma_n) = 0}$$

Remarque: On peut aussi faire le changement de variable qui suit et appliquer le théorème de convergence dominée à $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{f(\sin(u))}{u+n\pi}\, du$

2.2. Le changement de variable C^1 bijectif sur $[\pi/2+(n-1)\pi, \pi/2+n\pi]$ $u = t-n\pi$ donne (compte-tenu de l'imparité de f)

$$\gamma_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{f((-1)^n\sin(u))}{u+n\pi}\, du = (-1)^n\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{f(\sin(u))}{u+n\pi}\, du$$

On sépare l'intégrale en 2 et on pose $v=-u$ dans celle de gauche et $v=u$ dans celle de droite : :

$$\begin{aligned}\gamma_n &= (-1)^n \int_{-\pi/2}^{0} \frac{f(\sin(u))}{u+n\pi}\,du + (-1)^n \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(u))}{u+n\pi}\,du \\ &= (-1)^n \left(\int_{\pi/2}^{0} \frac{f(-\sin(v))}{-v+n\pi}\,(-dv) \right) + (-1)^n \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(v))}{v+n\pi}\,dv\end{aligned}$$

On en déduit (toujours avec l'imparité de f) que

$$\gamma_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \left(\frac{f(\sin(v))}{v-n\pi} - \frac{f(\sin(v))}{v+n\pi} \right) du = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \frac{-2vf(\sin(v))}{(v^2-n^2\pi^2)}\,du$$

ou encore

$$\boxed{\gamma_n = \mu_n}$$

2.3. On a

$$\forall t \in [0,\pi/2],\ |u_n(t)| \sim_{n->+\infty} \frac{2t\,|f(\sin(t))|}{n^2\pi^2}$$

Comme $2>1$ on a la convergence simple de $\sum(u_n)$ sur $[0,\pi/2]$.

2.4. On applique le théorème de continuité d'une somme de séries :

- les fonctions u_n sont toutes continues sur $[0,\pi/2]$
- On a convergence normale sur $[0,\pi/2]$;
  En effet $\left|t^2-n^2\pi^2\right| = n^2\pi^2 - t^2 \leq n^2\pi^2 - \pi^2/4$ car $n \geq 1$ . . On a donc

$$|u_n(t)| \leq \frac{\pi M_0}{n^2\pi^2-\pi^2/4}$$

avec $\dfrac{\pi M_0}{n^2\pi^2-\pi^2/4}$ indépendant de t et $\sum \dfrac{\pi M_0}{n^2\pi^2-\pi^2/4}$ qui converge par équivalent comme à la question précédente.

2.5. Les fonctions u_n et la somme S sont continues sur $[0,\pi/2]$ et la série $\sum(u_n)$ converge normalement sur le **segment** $[0,\pi/2]$, on peut intégrer termes à termes la série.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\gamma_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\mu_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi/2} u_n(t)dt = \int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\right)dt = \int_0^{\pi/2} S(t)\,dt$$

Sinon dire que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |u_n(t)|\,dt \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\pi M_0}{n^2\pi^2-\pi^2/4} = \frac{\pi}{2}\frac{\pi M_0}{n^2\pi^2-\pi^2/4}$ *qui est le terme général d'une série convergente.*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\gamma_n = \int_0^{\pi/2} S(t)\,dt}$$

2.6. On remarque que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\gamma_k = \sum_{k=1}^{n}\int_{\pi/2+(k-1)\pi}^{\pi/2+k\pi} \frac{f\left(\sin(t)\right)}{t}dt = \int_{\pi/2}^{\pi/2+n\pi} \frac{f\left(\sin(t)\right)}{t}dt$. Et cette expression admet une limite finie si n tend vers $+\infty$.

Pour un x quelconque on encadre x entre $\pi/2+n\pi$ et $\pi/2+(n+1)\pi$. C'est à dire que l'on prend $n = E\left(\dfrac{x}{\pi}-\dfrac{1}{2}\right)$On a alors, par relation de Chasles,

$$\int_{\pi/2}^{x} \frac{f(\sin(t))}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{n_x}\gamma_k + \int_{\pi/2+n\pi}^{x} \frac{f(\sin(t))}{t}\,dt$$

Quand $x \to +\infty$, $n \to +\infty$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_x}\gamma_k \to \int_0^{\pi/2} S(t)\,dt$. Par ailleurs,

$$\left|\int_{\pi/2+n\pi}^{x} \frac{f(\sin(t))}{t}\,dt\right| \leq M_0 \int_{\pi/2+n\pi}^{x} \frac{dt}{t} = M_0 \ln\left(\frac{x}{\pi/2+n\pi}\right) \leq M_0 \ln\left(\frac{\pi/2+(n+1)\pi}{\pi/2+n\pi}\right) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$$

On a donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\pi/2}^{x}\frac{f(\sin(t))}{t}\,dt=\int_0^{\pi/2}S(t)\,dt$$

Ce qui justifie la convergence de l'intégrale et le calcul :

$$\boxed{\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{f(\sin(t))}{t}\,dt=\int_0^{\pi/2}S(t)\,dt}$$

2.7. f est impaire donc $f(0)=0$. comme on suppose aussi f dérivable en 0 $\lim\limits_{0}\left(\dfrac{f(u)}{u}\right)=f'(0)$ et donc en posant $u=\sin(t)$ on a que $\dfrac{f(\sin(t))}{\sin(t)}$ est continue sur $]0,\pi/2]$,et admet une limite finie en 0 . $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}dt$ converge.

$t\to\dfrac{f(\sin(t))}{t}$ est continue sur $]0,\pi/2]$ et $\dfrac{f(\sin(t))}{t}\sim\dfrac{f(\sin(t))}{\sin(t)}$ admet une limite finie en 0 .$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{f(\sin(t))}{t}dt$ converge.

2.8. D'après les questions **III.2.6** et **III.2.7** .$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{f(\sin(t))}{t}dt$ et .$\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{f(\sin(t))}{t}dt$ convergent , donc aussi .$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(\sin(t))}{t}dt$. la relation de Chasles donne le calcul en utilisant la relation de **III.2.6**:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{f(\sin(t))}{t}\,dt-\int_0^{\pi/2}\frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}\,dt &= \int_0^{\pi/2}\frac{f(\sin(t))}{t}+\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{f(\sin(t))}{t}\,dt-\int_0^{\pi/2}\frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}\,dt\\ &= \int_0^{\pi/2}\frac{f(\sin(t))}{t}+\int_0^{\pi/2}S(t)\,dt-\int_0^{\pi/2}\frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}\,dt\\ &= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{f(\sin(t))}{t}-\frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}+S(t)\right)dt\end{aligned}$$

La fonction $t\to\left(\dfrac{f(\sin(t))}{t}-\dfrac{f(\sin(t))}{\sin(t)}+S(t)\right)$ est continue sur $]0,\pi/2]$ et se prolonge par continuité en 0 avec $f'(0)-f'(0)+S(0)=$ Donc, après prolongement, on a bien une fonction continue sur $[0,\pi/2]$.

3.1. Pour $f:x\to x$ (qui est bien continue , impaire sur $[-1,1]$ et dérivable en 0) on a (question **III.1.2**)

$$\forall t\in]0,\pi/2],\ S(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}=1-\frac{\sin(t)}{t}$$

et avec la question précédente,

$$J_1-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(t)}{\sin(t)}\,dt=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin(t)}{t}-\frac{\sin(t)}{\sin(t)}+1-\frac{\sin(t)}{t}\right)\,dt=0$$

c'est à dire

$$J_1=\int_0^{\pi/2}1.dt=\pi/2$$

$$\boxed{J_1=\pi/2}$$

3.2. On utilise cette fois $f(t)=t^3$. (qui est bien continue , impaire sur $[-1,1]$ et dérivable en 0) .

$$S(t)=(\sin(t))^2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}=\sin^2(t)-\frac{\sin^3(t)}{t}$$

la question **III.2** donne alors :

$$J_3-\int_0^{\pi/2}(\sin(t))^2\ \,dt=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{(\sin(t))^3}{t}-\frac{(\sin(t))^3}{\sin(t)}+\sin(t)^2-\frac{(\sin(t))^3}{t}\right)\,dt=0$$

qui se simplifie :

$$J_3=\int_0^{\pi/2}\sin^2(t)\,dt=\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{J_3=\pi/4}$$

3.3. On utilise plus généralement $f(f) = t^{2p+1}$. On obtient

$$S(t) = (\sin(t))^{2p} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2t\sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} = \sin(t)^{2p} - \frac{\sin(t)^{2p+1}}{t}$$

puis avec **III.2** (comme précédemment , les termes se simplifient)

$$J_{2p+1} = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^{2p} dt$$

On est ramené au calcul classique d'une intégrale de Wallis :

Une intégration par parties donne :

$$J_{2p+1} = (2p-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^{2p-2}(t) \; dt = (2p-1)(J_{2p-1} - J_{2p+1})$$

ou encore

$$J_{2p+1} = \frac{2p-1}{2p} J_{2p-1}$$

et donc :

$$J_{2p+1} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 5.3.1}{(2p)(2p-2)\cdots 6.4.2} J_0$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \;\; J_{2p+1} = \frac{(2p)!}{2^{2^p}(p!)^2}\pi/2}$$