Les calculatrices sont interdites

****

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Objectifs, notations et définitions

Les objectifs de ce problème sont les suivants :

- étendre la notion d'exponentielle à une matrice sans faire appel aux séries, mais par analogie avec l'introduction de la fonction réelle de variable réelle : $s \longmapsto e^{\alpha s}$ comme solution du problème de Cauchy : $y' = \alpha y$, $y(0) = 1$.

- établir quelques propriétés de cette exponentielle.

- résoudre dans $\mathbb{R}^3$ une équation différentielle du type $x' = u \wedge x$ que l'on rencontre en particulier en mécanique du solide.

Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Si n est un entier supérieur ou égal à 1, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients dans $\mathbb{C}$. I_n est la matrice identité dont les coefficients sont donnés par le symbole de Kronecker défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A, A_{ij} désigne le cofacteur de l'élément a_{ij} et on appelle comatrice de A la matrice dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est A_{ij}. Cette matrice sera notée $\operatorname{Com} A$.

Tournez la page S.V.P.

Lorsque les coefficients a_{ij} de A sont des fonctions de s définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on rappelle que A est dérivable sur I si et seulement si toutes les fonctions $a_{ij} \,:\, I \longrightarrow \mathbb{C}$ sont dérivables sur I et qu'alors :

$$\forall\, s \in I \ ,\ A'(s) = (a'_{ij}(s))_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

On pourra utiliser sans le redémontrer que le produit de deux applications A et B de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dérivables sur I, est dérivable sur I et que :

$$\forall\, s \in I \ ,\ (AB)'(s) = A'(s)B(s) + A(s)B'(s)$$

PARTIE I

I.1 Soit la matrice M donnée par : $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -6 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

a) Calculer $\det M$.

b) Calculer la matrice produit $M \times {}^t\mathrm{Com}\, M$.

c) Déterminer le polynôme caractéristique χ_M de M.

d) Calculer $(I_3 + M)(2I_3 - M)$, puis la matrice $\chi_M(M)$.

I.2 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$ et B la matrice déduite de A en remplaçant la $j^{\text{ème}}$ colonne de A par la colonne formée des coefficients $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

a) Montrer que $\det B = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \beta_k A_{kj}$.

b) En déduire les égalités : $\forall\, (l, j) \in \mathbb{N}_n^2 \ ,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{kl} A_{kj} = (\det A)\delta_{lj}$.

c) Montrer de même les égalités : $\forall\, (l, i) \in \mathbb{N}_n^2 \ ,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{lk} A_{ik} = (\det A)\delta_{li}$.

d) En déduire les formules :

$$A \times \left({}^t\mathrm{Com}\, A\right) = (\det A) I_n \ \text{ et } \ \left({}^t\mathrm{Com}\, A\right) \times A = (\det A) I_n$$

I.3 a) Soit $(G_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ une famille de n^2 polynômes à coefficients complexes, tous de degré inférieur ou égal à 1. Pour $x \in \mathbb{C}$, on note $G(x)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général $G_{ij}(x)$. Montrer par récurrence sur l'ordre de la matrice qu'il existe un polynôme Q à coefficients complexes, de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout x appartenant à $\mathbb{C}$, $\det G(x) = Q(x)$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $D_0, D_1, \ldots, D_p$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} x^k D_k = 0$. Montrer que pour tout k dans $\{0, 1, \ldots, p\}$, $D_k = 0$.

I.4 Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose $C(x) = {}^t\mathrm{Com}(A - xI_n)$ et on note $\chi_A(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ le polynôme caractéristique de A.

a) Montrer qu'il existe n matrices $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{C}\ ,\ C(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k B_k$$

b) En utilisant les questions **I.2** et **I.3**, établir les égalités matricielles suivantes :

$$\begin{cases} AB_0 & = & \alpha_0 I_n \\ AB_k - B_{k-1} & = & \alpha_k I_n \quad , \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_{n-1} \\ \quad -B_{n-1} & = & \alpha_n I_n \end{cases}$$

c) En déduire que le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A est un polynôme annulateur de A.

PARTIE II

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$ non nécessairement distinctes. On introduit les matrices suivantes :

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad , \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = I_n \ \text{ et } \ \forall\, k \in \{2, 3, \dots, n\}\ ,\ C_k = \prod_{j=1}^{k-1} (A - \lambda_j I_n)$$

II.1 a) Montrer que A commute avec chaque matrice C_k.

b) Montrer que $(A - \lambda_n I_n) C_n = 0$.

II.2 On rappelle que le problème de Cauchy

$$Y'(s) = HY(s) \quad , \quad Y(0) = Y_0$$

admet une unique solution $Y\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\ ,\ s \longmapsto Y(s)$. On notera $(y_i(s))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les composantes de $Y(s)$.

Tournez la page S.V.P.

On considère alors le nouveau problème de Cauchy suivant :

$$\forall\, s \in \mathbb{R}\ ,\ E'(s) = AE(s) \ \text{ et } \ E(0) = I_n \tag{1}$$

où la fonction inconnue E est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Soit $E_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ ,\ s \longmapsto \sum_{k=1}^{n} y_k(s)C_k$. Montrer que :

$$\forall\, s \in \mathbb{R}\ ,\ E'_A(s) = \sum_{k=1}^{n-1} y_k(s)[\lambda_k C_k + C_{k+1}] + y_n(s)\lambda_n C_n$$

En déduire que E_A est solution du problème (1).

b) Montrer que E_A est aussi solution du problème (2) ci-dessous :

$$\forall\, s \in \mathbb{R}\ ,\ E'(s) = E(s)A \ \text{ et } \ E(0) = I_n \tag{2}$$

c) Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ ,\ s \longmapsto E_A(s)E_A(-s)$. Montrer que la fonction φ est constante égale à I_n. En déduire que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $E_A(s)$ est inversible et donner son inverse.

d) Soit F une solution du problème (1) et ψ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie pour tout s réel par $\psi(s) = E_A(-s)F(s)$. Montrer que la fonction ψ est constante et en déduire que le problème (1) admet E_A pour unique solution.

e) Montrer que E_A est aussi l'unique solution du problème (2).

Désormais, on note pour tout s réel : $E_A(s) = e^{sA}$. La matrice $E_A(1) = e^{A}$ est appelée *exponentielle de la matrice A*. Cette notation et cette définition seront justifiées par les diverses propriétés étudiées dans la suite du problème.

II.3 A l'aide de l'algorithme décrit dans les questions précédentes, déterminer explicitement les coefficients de e^{sM}, où M est la matrice donnée à la question **I.1**.

II.4 Soit le problème de Cauchy dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ donné par :

$$\forall\, s \in \mathbb{R}\ ,\ Z'(s) = AZ(s) \ \text{ et } \ Z(0) = Z_0\ ,\ Z_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$$

Montrer que sa solution est donnée par $Z(s) = e^{sA}Z_0$.

PARTIE III

III.1 Montrer que pour tout s réel, la matrice e^{sA} est un polynôme en A.

III.2 Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.

a) Montrer que pour tout s réel, A et e^{sB} commutent.

b) Montrer que pour tout s réel, e^{sA} et e^{sB} commutent.

c) Montrer que les fonctions

$$\mu\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ ,\ s \longmapsto e^{s(A+B)}\ \text{ et }\ \nu\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ ,\ s \longmapsto e^{sA}e^{sB}$$

vérifient une même équation différentielle et en déduire $e^{A+B} = e^A \times e^B$.

III.3 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer e^A, e^B, e^{A+B} et $e^A e^B$. Quelle conclusion en tirez-vous ?

III.4 Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que si P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a pour tout s réel :

$$e^{sP^{-1}AP} = P^{-1}e^{sA}P$$

b) Montrer que pour tout s réel : $e^{s({}^tA)} = {}^t\left(e^{sA}\right)$.

PARTIE IV

On se place désormais dans l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $u = (a, b, c)$ est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. Soit x_0 un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et x l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ solution du problème de Cauchy :

$$\forall\, s \in \mathbb{R}\ ,\ \frac{dx}{ds} = u \wedge x\ \text{ et }\ x(0) = x_0 \tag{3}$$

IV.1 Si $X(s)$ et X_0 sont les matrices colonnes respectives des coordonnées de $x(s)$ et x_0 dans la base $\mathcal{B}$, montrer que le problème (3) s'écrit encore :

$$\forall\, s \in \mathbb{R}\ ,\ \frac{dX}{ds} = AX\ \text{ et }\ X(0) = X_0 \tag{4}$$

où A est une matrice que l'on précisera.

IV.2 Déterminer le polynôme caractéristique de A et montrer que $A^3 = -A$.

IV.3 Montrer que $e^{sA} = I_3 + (\sin s)A + (1 - \cos s)A^2$ et donner l'expression de la solution du problème (4).

IV.4 On note f et g respectivement les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices A et e^{sA}.

a) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ telle que la matrice de f dans cette base soit :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Déterminer l'image par g de la base $\mathcal{B}_0$, puis caractériser géométriquement l'endomorphisme g.

c) Calculer e^{sB}.

Fin de l'énoncé