E3A 2009
Mathématiques B PC
EXERCICE 1

1. 1.

   - F est l'ensemble des polynômes pairs de degré$\leq 2n$ donc

   $$F=\text{Vect}\left(1,X^2,..,X^{2k},..,X^{2n}\right)=\text{Vect}(X^{2k})_{k=0}^n$$

   F est un sous espace vectoriel de dimension $n+1$.
   De même
   $$G=\text{Vect}\left(X,..,X^{2k-1},..,X^{2n-1}\right)=\text{Vect}(X^{2k-1})_{k=1}^n$$
   est un sous espace vectoriel de dimension n .

   - les deux sous espaces sont orthogonaux . il suffit de le vérifier sur leur bases :

   $$\forall\,(k,k')\in[[0,n]]\times[[1,n]]\,,\left\langle X^{2k},X^{2k'-1}\right\rangle=\int_{-1}^1 t^{2k}t^{2k'-1}dt=\left[\frac{1}{2\,(k+k')}t^{2\left(k+k'\right)}\right]_{-1}^1=0$$

   Leur somme est directe et c'est E car les dimensions sont les bonnes :

   $$\dim(F)+\dim(G)=(n+1)+n=2n+1=\dim(E)$$

   $$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont deux sous espaces supplémentaires orthogonaux.}}$$

2. La dérivation des polynômes est une application linéaire donc Δ est une application linéaire. et si $P\in E$ on a

   $$d^\circ\left(\Delta\left(P\right)\right)=d^\circ\left(\left(X^2-1\right)P''+2XP'\right)$$

   Comme $d^\circ(P')\leq d^\circ(P)-1$ et $d^\circ(P")\leq d^\circ(P)-2$ on a d'après les théorèmes sur le degré d'une somme et d'un produit :
   $$d^\circ\left(\Delta\left(P\right)\right)\leq\max\left\{2+(2n-2)+1,(2n-1)=2n\right\}=2n$$
   $$\boxed{\Delta\in\mathcal{L}\left(E\right)}$$

3. On a
   $$\Delta\left(1\right)=0 \text{ et } \Delta\left(X\right)=2X$$
   et pour $k\geq 2:\ k\in[[2,2n]]\,,$
   $$\Delta\left(X^k\right)=\left(X^2-1\right)k\left(k-1\right)X^{k-2}+2X.kX^{k-1}=k\left(k+1\right)X^k-k\left(k-1\right)X^{k-2}$$
   La matrice de Δ relative à la base canonique est donc
   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & 0 & 6 & \ddots & -k\left(k-1\right) & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0\\ \vdots & & & \ddots & k\left(k+1\right) & \ddots & -2n\left(2n-1\right)\\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2n\left(2n+1\right)\end{pmatrix}$$
   La matrice est triangulaire supérieure, les valeurs propres sont alors les éléments de la diagonale. On a donc
   $$\boxed{Sp\left(\Delta\right)=\left\{k\left(k+1\right)\quad/\quad k\in[[0,2n]]\right\}}$$
   Les valeurs propres sont 2 à 2 distinctes (la fonction $k\to k\left(k+1\right)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$) Δ est donc diagonalisable et les sous espaces propres sont tous de dimension 1.

4. Pour $k\in[[0,n]]$

   - existence de P_k

   Il existe un polynôme ϕ_k non nul dans le sous espace propre $E_{k(k+1)}\left(\Delta\right)$. En divisant ϕ_k par son coefficient dominant on trouve un polynôme P_k normalisé dans le sous espace propre.

- Il existe $m = d^\circ(P_k) \in \mathbb{N}$ tel que $P_k = X^m + \sum_{j=0}^{m-1} p_j X^j$. On a la relation $\Delta(P) = k(k+1)P$. Le calcul du terme dominant (de degré m) donne $m(m+1) = k(k+1)$. D'où toujours par croissance stricte de $k- > k(k+1)$ on a $m = k$. Donc P_k est vecteur propre normalisé de degré k.
- unicité de P_k :
  Si P et Q sont deux solutions du problème, ils sont proportionnels (le sous espace propre est de dimension 1) donc égaux (même coefficient dominant).
  On note P_k cet unique polynôme il est, d'après ce qui précède, de degré k et de coefficient dominant 1.

5. Les applications $(P,Q)- > \langle \Delta(P), Q\rangle$ et $P,Q)- > \langle P, \Delta(Q)\rangle$ sont bilinéaires . Elle sont égales si et seulement si elles sont égales sur une base de E.On prend la base canonique . Il suffit de vérifier $\forall (k,l) \in [[0,2n]]^2$, $\langle \Delta(X^k), X^l\rangle = \left\langle X^k, \Delta(X^l)\right\rangle$. On a
   - si $k = 0$
   $$\langle \Delta(1), X^l\rangle = \int_{-1}^{1} 0dt = 0$$
   - si $k = 1$:
   $$\langle \Delta(X), X^l\rangle = \int_{-1}^{1} \left[2t^{1+1}\right] dt = \begin{cases} 0 & \text{si } 1+l \text{ impair} \\ \dfrac{4}{l+2} & \text{si } k+l \text{ est pair.} \end{cases}$$
   - Si $k \geq 2$
   $$\langle \Delta(X^k), X^l\rangle = \int_{-1}^{1} \left[k\,(k+1)\,t^{k+l} - k\,(k-1)\,t^{k+l-2}\right] dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k+l \text{ impair} \\ \dfrac{4kl}{(k+l-1)(k+l+1)} & \text{si } k+l \text{ est pair.} \end{cases}$$

   On remarque que la formule générale ($k \geq 2$) est vrai aussi si $k = 0$ et $k = 1$.
   $$\forall (k,l) \in [[0,2n]]^2 , \langle \Delta(X^k), X^l\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } k+l \text{ impair} \\ \dfrac{4kl}{(k+l-1)(k+l+1)} & \text{si } k+l \text{ est pair.} \end{cases}$$
   L'expression est symétrique en k et l donc $\langle \Delta(X^k), X^l\rangle = \langle \Delta(X^l), X^k\rangle = \left\langle X^k, \Delta(X^l)\right\rangle$

   $$\boxed{\text{La famille } \mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_{2n}) \text{ est une base orthogonale}}$$

   Si on remarque que $\Delta(P) = \left((X^2-1)P'\right)'$ on peut faire une intégration par partie pour montrer le résultat.
6. P_k est un vecteur propre pour la valeur propre $k(k+1)$. On regarde $Q_k = P_k(-X)$, on a $Q'_k = -P_k(-X)$ et $Q"_k = P"_k(-X)$.
   On remplace X par $-X$ dans
   $$k(k+1)P_k(X) = (X^2-1)P_k"(X) + 2XP'_k(X)$$
   on a
   $$k(k+1)P_k(-X) = ((-X)^2-1)P"_k(-X) + 2(-X)P'_k(-X)$$
   soit
   $$k(k+1)Q_k(X) = (X^2-1)Q"_k(X) + 2(X)Q'_k(-X)$$
   donc Q_k est aussi propre pour la valeur propre $k(k+1)$. . Le sous espace propre est une droite donc Q_k est un multiple de P_k . Le coefficient dominant donne $Q_k = (-1)^k\, P_k$
   Si k est pair $P_k(-X) = P_k(X)$ donc $(P_{2k})_{k=0}^{n}$ est une famille libre de F ayant le bon cardinal : c'est une base. Idem pour k impair.
   $$\boxed{(P_{2k})_{k=0}^{n} \text{ est une base de } F}$$

2.

   1.

   - $\Delta(1) = 0$ donc $P_0 = 1$.
   - P_1 est un polynôme normalisé impair de degré 1 donc $P_1 = X$.

- P_2 un polynôme normalisé pair de degré 2 donc il existe α tel que $P_2 = X^2 + \alpha$. On pose $\Delta(P_2) = 6P_2$:

$$\Delta\left(X^2+\alpha\right) = 6X^2 - 2 = 6\left(X^2+\alpha\right)$$

d'où $\underline{P_2 = X^2 - \frac{1}{3}}$.

La famille (P_0, P_1, P_2) est orthogonale, il suffit donc de la normaliser pour obtenir une base orthonormale de E. On a

$$\begin{aligned} \|P_0\|^2 &= \int_{-1}^{1} 1dt = 2 \quad , \quad \|P_1\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3} \\ \|P_2\|^2 &= \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \frac{8}{45} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{une B.O.N. est } \left(Q_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}, Q_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X, Q_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)\right)}$$

2. D'après la question **1.f)** on a $G = vect\,(P_1)$ donc $G = vect\,(Q_1)$ .On utilise la formule de calcul d'une distance à un sous espace muni d'une base orthonormée $(d(x,F)^2 = \|x\|^2 - \sum \langle f_i, x\rangle^2)$.La distance de A à G est alors

$$d\,(A,G) = \|A\|^2 - \langle A, Q_1\rangle^2 = \int_{-1}^{1}(t+1)^2 dt - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1}(t^2+t)dt\right)^2 = \frac{8}{3} - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2$$

$$\boxed{d(A,G) = \sqrt{2}}$$

3. Soit M_2 la matrice de Δ dans la base (P_0, P_1, P_2) et H la matrice d'un endomorphisme h élément de C. On a

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \ , H = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

h est un élément de C si et seulement si $M_2 H = H M_2$. soit

$$MH = HM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2d & 2e & 2f \\ 6g & 6h & 6i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b & 6c \\ 0 & 2e & 6f \\ 0 & 2h & 6i \end{pmatrix}$$

On en déduit que H est aussi une matrice diagonale. L'ensemble des matrices qui commutent avec M_2 est donc engendré par (E_{11}, E_{22}, E_{33}) , il est donc de dimension 3.
Par isomorphisme on peut donc dire que C est un espace vectoriel de dimension 3.

4. Si un endomorphisme g vérifie $g \circ g = \Delta$ alors $g \circ \Delta = g^3 = \Delta \circ g$, c'est donc un élément de C. Sa matrice dans la base (P_0, P_1, P_2) est diagonale, d'après la question précédente. On cherche donc les matrices $H = \left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}\right)$ vérifiant $H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On 4 solutions } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{6} \end{pmatrix}}$$

EXERCICE 2

1.

1.

1. On a

$$(2x-1)^2+(2y)^2=1 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

c'est l'équation du cercle de centre $\left(\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

- On a $\{(\cos(t)^2, \cos(t)\sin(t), t\in\mathbb{R}\} \in C_1$ car pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$(2x-1)^2+(2y)^2=\left(2\cos^2(t)-1\right)^2+(2\sin(t)\cos(t))^2=(\cos(2t))^2+(\sin(2t))^2=1$$

- Réciproquement : Pour tout $M\ (x,y)\in C_1$, on a $(2x-1)^2+(2y)^2=1$. Donc il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que : $2x-1=\cos(\theta)$ et $2y=\sin(\theta)$
donc $x=\dfrac{1+\cos(\theta)}{2}=\cos(\theta/2)^2$ et $y=\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$. $t=\dfrac{\theta}{2}$ est solution :

$$x=\cos^2(t) \text{ et } y=\cos(t)\sin(t)$$

$$\boxed{C^1=\{(\cos(t)^2,\cos(t)\sin(t)t\in\mathbb{R}\}}$$

2. Même principe :
   - soit $t\in\mathbb{R}$ on a
   $$\cos^2(t)+(\sin(t))^2=1$$
   donc la courbe C_2 est incluse dans la courbe définie par $x+y^2=1$
   De plus $y=\sin(t)\in[-1,1]$.
   - Réciproquement :Pour tout $M(x,y)\in C^2$ vérifiant $|y|\leq 1$, il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $y=\sin(t)$. On a alors $x=1-y^2=\cos^2(t)$. La courbe C_2 est donc définie par $x+y^2=1$, avec $-1\leq y\leq 1$.

   $$\boxed{C^2 \text{ est le morceau de la parabole } y^2=1-x \text{ , vérifiant } -1\leq 0\leq 1}$$

   On trace la courbe $y=\sqrt{1-x}$ pour $x\in[0,1]$ et on complète par symétrie par rapport à Ox .
3. Idem :
   - soit $t\in\mathbb{R}$:
   $$(2\cos(t)\sin(t))^2+(1-2\sin(t)^2)^2=(\sin(2t))^2+(\cos(2t)^2=1$$
   - Réciproquement si $(2x)^2+(1-2y^2)=1$ il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $2x=\sin(\theta)=2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ et $1-2y^2=\cos(\theta)$
   donc $y^2=\dfrac{1-\cos(\theta)}{2}=(\sin(\theta/2)^2$
   On pose $t=\theta/2$ si y et $\sin(\theta/2)$ sont de même signe.$t=\theta/2+\pi$ sinon : $x=\sin(t)\cos(t), y=\sin(t)$
   - L'équation obtenue n'est pas celle d'une courbe usuelle. On étudie la courbe en paramétrique :
   la fonction est 2π périodique impaire et vérifie $\begin{cases} x(\pi-t)=-x(t) \\ y(\pi-t)=y(t)\end{cases}$. Donc la courbe s'étudie sur $E=[0,\pi/2]$ et s'obtient en complétant par symétrie par rapport à O et par rapport à Oy .
   Sur E la fonction est C^∞ et $x'(t)=\cos(2t)\begin{cases} >0 \text{ sur } [0,\pi/4[\\ <0 \text{ sur }]\pi/4,\pi/2[\end{cases}$, $y'(t)=\cos(t)\geq 0$

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0
$yt)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1
$y'(t)$		$+$		$+$	

2.

1.

- L'équation de S_1 ne dépend pas de z : On a un cylindre. et la section par le plan $z=0$ est le cercle C_1.
S_1 est le cylindre d'axe parallèle à Oz et de directrice le cercle C_1
- S_2 est la sphère de centre O et de rayon 1.

2. Γ est l'intersection des deux surfaces S_1 et S_2
3.

- en un point régulier $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ de la surface $F(x,y,z)=0$ un vecteur normal est $\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0)$. Une équation du plan tangent à la surface d'équation $F(x,y,z)=0$ est

$$\left(\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0) \mid \overrightarrow{M_0M}\right)=0$$

ou encore

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

On trouve donc : pour S_1 : $(2x_0-1).(x-x_0)+2y_0.(y-y_0)=0$ soit :

$$\boxed{(2x_0-1)x+2y_0y+(-2x_0^2+x_0-2y_0^2)=0}$$

qui peut se simplifier comme le point est sur la surface $(-2x_0^2+x_0-2y_0^2)=-x_0$

$$(2x_0-1)x+2y_0y-x_0=0$$

- Pour S_2 : $2x_0.(x-x_0)+2y_0.(y-y_0)+2z_0.(z-z_0)=0$ soit

$$\boxed{xx_0+yy_0+zz_0=1}$$

- Lorsque les plans tangents aux surfaces ne sont pas confondus, la tangente au point d'intersection des deux surface est alors l'intersection des deux plans tangents.
ici les deux vecteurs gradient sont $\begin{pmatrix} 2x_0-1\\ 2y_0\\ 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2x_0\\ 2y_0\\ 2z_0\end{pmatrix}$. On a $\begin{pmatrix} 2x_0-1\\ 2y_0\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 2x_0\\ 2y_0\\ 2z_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4y_0z_0\\ 2z_0(1-2x_0)\\ -2y_0\end{pmatrix}$
Les deux plans sont distincts si ce vecteur est non nul . Le première coordonnée donne $y_0=0$ ou $z_0=0$
  - si $y_0=0$ la seconde donne $z_0=0$ ou $x_0=1/2$
  - si $y_0=z_0=0$ l'équation de Γ donne : $\begin{cases} x_0=x_0^2\\ x_0^2=1\end{cases}$ donc $M_0=(1,0,0)$
  - si $y_0=0$ et $x_0=1/2$ l'équation de Γ donne : $\begin{cases} 1/2=1/4\\ \text{inutile}\end{cases}$ ce n'est pas possible
  - si $z_0=0$ on a $y_0=0$ donc $x_0=1$

$$\boxed{\text{En un point autre que } (1,0,0) \text{ la tangente est dirigée par } (2y_0z_0, z_0(1-2x_0), -2y_0)}$$

  Au point $(1,0,0)$ on ne peut pas passer par l'intersection des plans tangents, mais rien ne prouve que le point soit singulier.

4.

- Soit M un point de coordonnées $(x,y,z)=(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$ .On a

$$M\in\Gamma \Leftrightarrow r\cos(\theta)=r^2 \text{ et } r^2+z^2=1$$

Le première relation donne $r=0$ ou $r=\cos(\theta)$
  - si $r=\cos(\theta)$ on a $z=\pm\sin(\theta)$, Soit $\begin{cases} x=\cos(\theta)^2\\ y=\cos(\theta)\sin(\theta)\\ z=\pm\sin(\theta)\end{cases}$ en prenant $t=\theta$ si $z=\sin(\theta)$ et $t=\pi+\theta$ si $z=-\sin(\theta)$. On a $\begin{pmatrix} x=\cos(t)^2\\ y=\sin(t)\cos(t)\\ z=\sin(t)\end{pmatrix}$
  - si $r=0$ $z^2=1$ donc $z=\pm1$. Les points sont obtenus pour $t=\pi/2$ et $t=-\pi/2$
  On obtient donc

$$x=\cos^2(t), y=\cos(t)\sin(t), z=\sin(t), t\in\mathbb{R}$$

– Réciproquement si

$$x = \cos^2(t), y = \cos(t)\sin(t), z = \sin(t), t \in \mathbb{R}$$

on a $x^2 + y^2 = \cos(t)^2(\cos(t)^2 + \sin(t)^2) = x$ et $x^2 + y^2 + z^2 = \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$ et donc

$$\boxed{M \in \Gamma \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, x = \cos^2(t), y = \cos(t)\sin(t), z = \sin(t)}$$

- Soit le cône de sommet $S = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ s'appuyant sur Γ on a .

$$\begin{aligned} M \quad \in \quad Cone &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \exists M_0 \in \Gamma \quad \overrightarrow{SM} = \lambda \overrightarrow{SM_0} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, t) \in \mathbb{R}^2 : \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + \lambda \left(\cos^2(t) - \frac{1}{2}\right) \\ y = \lambda \cos(t)\sin(t) \\ z = \lambda \sin(t) \end{array} \right. \end{aligned}$$

5. C'est le résultat de la question d.
6. Les trois courbes planes projections orthogonales de Γ sur les plans xOy, xOz et yOz sont obtenues en annulant une coordonnée.
   Sur xOy : $z = 0, x = \cos^2(t), y = \cos(t)\sin(t), t \in \mathbb{R}$: courbe C_1;
   sur xOz : $y = 0, x = \cos^2(t), z = \sin(t), t \in \mathbb{R}$: C'est la courbe C_2 dans le plan xOz
   sur yOz : $x = 0, y = \cos(t)\sin(t), z = \sin(t), t \in \mathbb{R}$: C'est la courbe C_3 dans le plan yOz

EXERCICE 3

1. 1.
   - J existe : La fonction $\theta : x \to \dfrac{\ln(x)}{1-x}$ est continue, négative sur $]0,1[$. La fonction est prolongeable par continuité en 1 en posant $\theta(1) = -1$. Enfin au voisinage de 0 on a $\theta(x) \sim \ln(x)$ fonction intégrable sur $]0,1]$ donc la fonction $x \to \dfrac{\ln(x)}{1-x}$ est intégrable sur $]0,1[$.
   - K existe : On fait le changement de variable $x = 1 - X$ C^1 bijectif de $]0,1[$ sur $]0,1[$ dans J et on trouve K
   - On a en plus : $K = J$

   2.
   - u_0 existe car la fonction ln est intégrable sur $]0,1]$ et $u_0 = \lim\limits_{X \to 0} \displaystyle\int_X^1 \ln(x)\, dx = \lim\limits_{X \to 0} \left([x\ln(x) - x]_X^1 \right) = -1$
   - Soit $n > 0$ u_n existe : la fonction $x \to x^n \ln(x)$ se prolonge par continuité en 0. Elle est donc intégrable sur $]0,1]$
     et :

$$\begin{aligned} u_n &= \lim_{X \to 0} \int_X^1 x^n \ln(x)\, dx = \lim_{X \to 0} \left(\left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln(x) \right]_X^1 - \int_X^1 \frac{1}{n+1} x^n dx \right) \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

   3.
   - la fonction f est 2π périodique et paire donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$
   - $a_0(f) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi x.dx = \pi$
   - pour $n > 0$ on a par parité :

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x.\cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{1}{n} x \sin(nx) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n} \sin(nx)\, dx \right) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} [\cos(nx)]_0^\pi = \frac{2}{\pi . n^2} \left((-1)^n - 1 \right)$$

D'où

$$\forall n \in N^* \quad a_n = \left\{ \begin{array}{r} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{array} \right.$$

- La fonction f est continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, sa série de Fourier converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad f\left(x\right)=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi\left(2k+1\right)^2}\cos\left(\left(2k+1\right)x\right)}$$

En particulier pour $x=0$ et on obtient $0=\dfrac{\pi}{2}-\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi\left(2n+1\right)^2}$d'où

$$\boxed{S=\frac{\pi^2}{8}}$$

4. On a (séparation classique des termes pairs et impairs) :

$$T=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(2k\right)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(2k+1\right)^2}=\frac{1}{4}T+S$$

D'où $\dfrac{3}{4}T=S$. On en déduit que $\boxed{T=\dfrac{\pi^2}{6}}$

5. Pour tout $x\in\left]0,1\right[$ on a $\dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ (série entière de rayon de convergence 1). On a donc

$$\forall x\in\left]0,1\right[\quad\frac{\ln\left(x\right)}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\ln\left(x\right)$$

On pose $f_n\left(x\right)=x^n\ln\left(x\right)$ pour $x\in\left]0,1\right[$.et on doit justifier l'intégration termes à termes :

- Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $\left]0,1\right[$..
- La série $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction $x\to\dfrac{\ln\left(x\right)}{1-x}$
- $\displaystyle\sum\int_0^1\left|x^n\ln\left(x\right)\right|dx=\sum\frac{1}{\left(n+1\right)^2}$ est une série convergente.

On peut donc dire :

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\ln\left(x\right)}{1-x}dx&=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\ln\left(x\right)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1x^n\ln\left(x\right)dx=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(n+1\right)^2}\\&=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{J=K=-\frac{\pi^2}{6}}$$

6.

- Pour $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln\left(x\right)}{1+x}dx$ on reprend le plan de l'étude précédente :
  - $x->\dfrac{\ln(x)}{1+x}$ est continue sur $\left]0,1\right]$ équivalente en 0 à $\ln\left(x\right)$ qui est intégrable sur $\left]0,1\right]$

    $\dfrac{\ln\left(x\right)}{1+x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^nx^n\ln\left(x\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^nf_n\left(x\right)$ et les hypothèses du théorème d'intégration termes à termes sont encore vérifiées:
  - intégrabilité $\left(-1\right)^nf_n$ sur $\left]0,1\right]$
  - convergence simple de $\sum(-1)^nf_n$
  - convergence de $\displaystyle\sum\int_0^1\left|(-1)^nf_n\right|=\sum\frac{1}{(n+1)^2}$

– et donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n \ln(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 x^n \ln(x)\,dx = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^é}{8} = -\frac{\pi^2}{12}$

- Et $\dfrac{\ln(x)}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln(x)}{1-x} + \dfrac{\ln(x)}{1+x}\right)$ donc par linéarité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}dx$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\pi^é}{6} + -\dfrac{\pi^2}{12}\right) = -\dfrac{\pi^2}{8}$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}dx = -\frac{\pi^2}{12}\ ,\ \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}dx = -\frac{\pi^2}{8}}$$

2. 1. On reconnaît le développement en série entière de $-\ln(1-x)$ en $\dfrac{1}{2}$ qui est dans le disque ouvert de convergence :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k2^k} = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k2^k} = \ln(2)}$$

$\displaystyle\sum \frac{1}{k^2 2^k}$ est une série à termes positifs et $k^2\dfrac{1}{k^2 2^k}$ tend vers 0 donc la série converge.

2. En gardant la notation $f_n = x^n \ln(x)$ on a $\forall x \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ $\dfrac{\ln(x)}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. On peut toujours intégrer termes à termes sur $(0, 1/2]$:les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ et on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x)|\,dx \le \int_0^1 |f_n(x)|\,dx \le \frac{1}{(n+1)^2}$$

donc la série $\displaystyle\sum \int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x)|\,dx$ est convergente. Or les même calculs qu'à la question 1 donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)}{1-x}dx &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}\right) \\ &= -\ln(2)\,A - B = -(\ln(2))^2 - B\end{aligned}$$

3. la fonction $t \to \ln(1-t)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et on a

$$\frac{\ln(1-t)}{t} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}t^n$$

Comme on a une série entière, on peut prendre une primitive sur le disque ouvert de convergence :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}$$

d'où pour $x = 1/2$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -B$$

On a de plus, par changement de variable C^1 bijectif $u = 1-t$

$$\begin{aligned} -B &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(u)}{1-u} (-1)\, du = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(u)}{1-u} du = -\frac{\pi^2}{6} + (\ln(2))^2 + B \end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{B = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 2^k} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \ln^2(2)}$$

3.

1. $\ln(1-x) =_{x->0} -x - \dfrac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$, d'où $g(x) =_{x->0} -\dfrac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$.
   On a donc :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= h_{n+1} - h_n - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{2(n+1)^2} \sim -\frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

2. Pa comparaison à $\sum \dfrac{1}{n^2}$ série à termes positifs convergente, on déduit que $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge.
   et donc par comparaison suite-série la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
3. On a va appliquer le critère spécial des séries alternées :
   - On a donc $h_n = a_n + \ln(n)$ qui tend vers $+\infty$. Ce qui donne $\dfrac{h_n}{n} >> \dfrac{1}{n}$.De plus la série est à termes positifs donc la série $\sum \dfrac{h_n}{n}$ est divergente.
   - La série $\sum (-1)^n h_n$ est une série alternées. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{h_n}{n} = 0$ car (a_n) est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{h_n}{n} = \lim\left(\dfrac{\ln(n)}{n} + \dfrac{a_n}{n}\right) =$
   -

$$\begin{aligned} \frac{h_{n+1}}{n+1} - \frac{h_n}{n} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{n\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - (n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n(n+1)} \\ &= \frac{\frac{n}{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n(n+1)} = \frac{\frac{n}{n+1} - \ln(n) - a_n}{n(n+1)} \end{aligned}$$

   le numérateur tend vers $-\infty$. Il est donc négatif à partir d'un certain rang.
   La suite $\left(\dfrac{h_n}{n}\right)$ est donc décroissante à partir d'un certain rang.

$$\boxed{\text{La série } \sum (-1)^n h_n \text{ converge}}$$

4.

1. La fonction $x \mapsto x^n \ln(1-x)$ est continue sur $[0,1[$, de signe constant.
   Au voisinage de 1 on a $x^n \ln(1-x) \sim \ln(1-x)$, or cette fonction est intégrable sur $[0,1[$ donc la fonction est intégrable sur $[0,1[$,
   On souhaite $v_n = -\dfrac{h_{n+1}}{n+1}$ donc $(n+1)v_n - nv_{n-1} = -h_{n+1} + h_n = \dfrac{1}{n+1}$
   On écrit donc

$$(n+1)v_n - nv_{n-1} = \int_0^1 \left((n+1)x^n - nx^{n-1}\right) \ln(1-x) dx$$

On intègre par partie sur $[0, X]$ et on passe à la limite en posant $u = x^{n+1} - x^n = -(1-x)x^n$ et $v = \ln(1-x)$. Comme $\lim\limits_{1}(uv) = 0$ on a

$$(n+1)v_n - nv_{n-1} = -\int_0^1 x^n dx = -\frac{1}{n+1}$$

On a donc

$$(n+1)v_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + v_0$$

avec $v_0 = \int_0^1 \ln(1-x)dx = \int_0^1 \ln(X)dX = -1$ et donc $(n+1)v_n = -\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} = -\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = -h_{n+1}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ v_n = -\frac{h_{n+1}}{n+1}}$$

2.

- Le changement de variable $x = 1 - t$ donne :

$$V = -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{2-x} dx$$

Or $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-x/2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$ et donc $V = -\int_0^1 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \ln(x)}{2^{n+1}} dx$. Comme la série $\sum \left| \int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{2^{n+1}} dx \right| = \sum \frac{1}{(n+1)}$ converge on peut intégrer termes à termes (les autres hypothèses ne posent pas de problème)

$$\boxed{V = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{é}2^n}}$$

- On a $\int_0^1 -\frac{\ln(1-t)}{1+t} dt = \int_0^1 \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} t^n \ln(1-t) dt$ mais cette fois ci la série $\sum \left| \int_0^1 (-1)^{n-1} t^n \ln(1-t) dt \right|$ $= \sum \frac{h_{n+1}}{n+1}$ diverge. On ne peut pas intégrer termes à termes
On passe par les sommes partielles :

$$\sum_{n=0}^{N} (-t)^n \ln(1-t) = \frac{(1-(-t)^{N+1})}{1+t} \ln(1-t) = \frac{\ln(1-t)}{1+t} - \frac{(-t)^{N+1}\ln(1-t)}{1+t\ .}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-t)^n \ln(1-t) dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-t)^n \ln(1-t) dt = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}\ln(1-t)}{1+t\ .} dt$$

Or

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}\ln(1-t)}{1+t\ .} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^{N+1}(-\ln(1-t))}{1+t\ .} dt \leq -\int_0^1 t^{N+1} \ln(1-t) dt = \frac{h_{N+2}}{N+2}$$

et comme on sait que $\lim \left(\frac{h_n}{n} \right) = 0$ (d'après **3.b)**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-t)^n \ln(1-t) dt = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t} dt$$

Soit

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{h_{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{h_n}{n}$$

$$\boxed{V = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{h_n}{n}}$$