Ecole supérieure de plasturgie
Math 1 problème 1
concours 2002

PARTIE A

1. **a)** Soit $y \in \text{Im}(u)$ on a par définition de l'image : $\exists x \in E$, $y = u(x)$. On a donc $u(y) = u^2(x) = \overrightarrow{0}$ car $u^2 = 0$

$$\boxed{\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)}$$

b) On a donc $r = rg(u) \leq \dim(\text{Ker}(p)) = p$. Or par le théorème du rang $r + p = n$ donc

$$\boxed{r \leq n/2 \ , \ p \geq n/2}$$

2. **a)**si $n = 2$ on a $r \leq 1, p \geq 1$ et $r + p = 2$ .Mais on sait aussi que $u \neq 0$ donc $r > 0$. Comme r et p sont des entiers il reste $(r = p = 1)$

Pour les sous espaces vectoriels $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ on a donc l'égalité des dimensions et une inclusion (**1a**). On a donc

$$\boxed{\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)}$$

b) Si on considère la famille (i, j) on a deux vecteurs en dimension 2. C'est une base si et seulement si la famille est libre. Or

$$\begin{aligned} xi + yj &= 0 \Rightarrow xu(i) + yu(j) = 0 \text{ en composant par } u \\ &\Rightarrow yj = 0 \text{ car } u(i) = u^2(j) = 0 \text{ et } u(i) = j \\ &\Rightarrow y = 0 \text{ car } j \neq \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

En reportant dans l'équation initiale on obtient $x = y = 0$ et le système est libre.

Dans cette base

$$\text{Mat}_{(i,j)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. **a)** Comme à la question précédente on a comme p et r sont entiers :$0 < r \leq 1, p \geq 2$ et $r + p = 3$. La seule solution est :

$$\boxed{r = 1, p = 2}$$

b) par hypothèse $i = u(k)$ et $u^2 = 0$ donc $i \in \text{Ker}(u)$. Mais $\text{Vect}(i)$ est une droite incluse dans le plan $\text{Ker}(u)$. Il existe donc des vecteurs éléments de $\text{Ker}(u) - \text{Vect}(i)$. On peut prendre pour j l'un d'entre eux et par construction (i, j) est un système libre de $\text{Ker}(u)$ de bon cardinal . Donc une base de $\text{Ker}(u)$. Enfin $k \notin \text{Ker}(u)$ donc $k \notin \text{Vect}(i, j)$ donc (i, j, k) est un système libre de cardinal $3 = \dim(E)$ donc une base de E.

c)

$$\text{Mat}_{(i,jk)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PARTIE B

1. **a)** Le calcul du produit des deux matrices donnent $J^2 = (0)$ donc $v^2 = 0$

b) On effectue un pivot de Gauss , ou on pose le système linéaire $JX = 0$. Le noyau de J est l'hyperplan $x - y - z = 0$ dont **une** base est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. L'image de u est engendré par les vecteurs colonnes . Ils sont proportionnels $\text{Im}(u) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) On retrouve la matrice du **A3**: On prend donc $k \notin \text{Ker}(u)$, $i = u(k)$ et $j \in \text{Ker}(u) - \text{Vect}(j)$. Par exemple :

$$k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. **a)** Soit $M = I + mJ$ et $N = I + nJ$ on a $MN = (I + mJ)(I + nJ) = I + mJ + nJ + mnJ^2 = I + (m + n)J$ car $J^2 = 0$. Donc MN est bien un élément de Δ .

 b) D'après le calcul précédent $M(I - mJ) = I$ et $(I - mJ)M = I$ donc M est inversible et $M^{-1} \in \Delta$.

 Δ est donc un sous ensemble non vide de $GL_3(\mathbb{R})$ stable par produit et passage à l'inverse. Donc Δ est un sous groupe multiplicatif de $GL_3(\mathbb{R})$.

 De plus $\phi : m \to (I + mJ)$ est une application de $\mathbb{R}$ dans Δ vérifiant :

 - ϕ est un morphisme : $\phi(m)\phi(n) = \phi(m + n)$ d'après le premier calcul
 - ϕ est surjective par définition de Δ
 - ϕ est injective : $\phi(m) = \phi(n) \Rightarrow I + mJ = I + nJ \Rightarrow (m - n)J = 0 \Rightarrow m = n$ car $J \neq (0)$

$$\boxed{\Delta \text{ est un groupe multiplicatif isomorphe à } (\mathbb{R}, +)}$$

 c) I et J étant non nuls et non proportionnels forment un système libre . La combinaison linéaire $I + mJ$ ne peut donc pas être la matrice nulle (0) .

$$\boxed{\Delta \text{ n'est pas un sous espace vectoriel de } M_3(\mathbb{R})}$$

3. **a)** Soit$X = I + xJ$ une matrice de Δ vérifiant $X^2 = M$ on a donc $2x = m$ donc $x = m/2$

$$\boxed{\text{Dans } \Delta\ X^2 = M \text{ admet une unique solution}}$$

 b) On a $P^{-1}MP = P^{-1}IP + mP^{-1}JP = I + m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ par définition de P . Donc

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N$$

 c) On a $Y^2 = P^{-1}XPP^{-1}XP = P^{-1}X^2P = P^{-1}MP = N$

 d) On a $YN = NY = Y^3$ de façon évidente. Or

$$YN = \begin{pmatrix} a & b & ma + c \\ d & e & md + f \\ g & h & mg + i \end{pmatrix} \text{ et } NY = \begin{pmatrix} a + mg & b + mh & c + mi \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

 En regardant la première ligne et la dernière colonne on a comme $m \neq 0$: $g = 0, h = 0, a = i, d = 0, g = 0$ Soit

$$Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

 e) L'équation $Y^2 = N$ conduit alors à résoudre :

$$\begin{pmatrix} a^2 & b(a + e) & 2ac + bf \\ 0 & e^2 & f(a + e) \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

 on a donc $a = \pm 1, e = \pm 1, c = (m - bf)/2a$ et si $a + e \neq 0$ $b = f = 0$

$$Y = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & m/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } Y = \pm \begin{pmatrix} 1 & b & \frac{m-bf}{2} \\ 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ o}$$

 La première solution est celle qui est dans Δ (ou son opposé). On vérifie que les autres matrices sont aussi solutions.

 f) On a lors $X = PYP^{-1}$

X-ESPCI 2002- filière PC- deuxième composition.

Première partie

Notations: $\mathcal{C} = (E_i)_{1\leq i\leq n}$désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note $diag(A) = (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ la diagonale de A.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire tel que $A = Mat_{\mathcal{C}}(u)$

Le sujet comporte un abus de notation classique en multipliant une matrice (A) par un vecteur . C'est l'identification usuel d'une matrice colonne et d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$. L'introduction de u permet de faciliter la rédaction en évitant trop d'abus de ce type.

On utilisera souvent le fait rue si A et B sont semblables alors pour tout scalaire α $A + \alpha I$ et $B + \alpha I$ sont aussi semblable : $A = PBP^{-1} \Rightarrow (A + \alpha I) = P(B + \alpha I)P^{-1}$

1.

a) Raisonnement par l'absurde: on suppose que tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ est vecteur propre de u.
En particulier: $\forall i \in [1..n] \quad \exists \lambda_i \in \mathbb{R} \quad u(E_i) = \lambda_i E_i$. En écrivant que $X = E_i + E_j$ est aussi vecteur propre, on obtient: $u(X) = \mu X$ soit $\mu(E_i + E_j) = \lambda_i E_i + \lambda_j E_j$. Pour tous les i, j tels que $i \neq j$, on déduit $\mu = \lambda_i = \lambda_j$ car (E_i, E_j) est libre. Ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n$ qui prouve que A est scalaire.

Remarque : C'est l'idée classique que si pour un endomorphisme u tout vecteur est lié avec son image alors l'endomorphisme est une homothétie.

1. **b)** Une matrice B est $B = Mat_{\mathcal{C}'}(u)$ où $\mathcal{C}' = (E'_k)_{1\leq k\leq n}$ se déduit de $\mathcal{C}$ par l'échange de E_i et E_j c'est-à-dire

$$E'_i = E_j \quad ; E'_j = E_i \quad ; E'_k = E_k \quad \text{si} \quad k \notin \{i, j\}.$$

Deuxième partie

2. $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $tr(A) = 0$.

a) Si $A \neq 0$, A ne peut être scalaire (car $tr(\lambda I) = n\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$). D'après **1.a),** il existe $X_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que X_1 et $X_2 = A = u(X_1)$ sont liés. On complète ensuite la famille libre (X_1, X_2) en une base de $\mathbb{R}^n$.

b) On considère: $\mathcal{P}(n)$: "toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $tr(A) = 0$ est semblable à une matrice de diagonale nulle".
$\mathcal{P}(1)$ étant évidente,
$\mathcal{P}(2)$ est vrai : D'après le a) il existe une base (X_1, X_2) telle que dans cette base $u(X_1) = X_2$ on a donc

$$Mat_{(X_1X_2)}(u) = B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

et A est donc semblable à cette matrice. Or deux matrices semblables ont même trace donc $b = 0$. On a bien le résultat voulu.

<u>hérédité</u> : on suppose que $\mathcal{P}(n-1)$ est vraie pour un entier $n \geq 3$ et on démontre $\mathcal{P}(n)$:
Soit une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle .On suppose $A \neq 0$ (pour $A = 0$, le résultat est immédiat) et on considère $\mathcal{X} = (X_1, X_2..., X_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ tel que $u(X_1) = X_2$. Alors

$$A' = Mat_{\mathcal{X}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ C_1 & A_1 \end{pmatrix}$$

où $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{n-1,1}(\mathbb{R})$, $L_1 \in M_{1,n-1}(\mathbb{R})$ est une matrice ligne et $A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$. Les matrices semblables A et A' ont même trace, à savoir: $0 = tr(A) = tr(A') = tr(A_1)$.

On applique ensuite $\mathcal{P}(n-1)$ à la matrice A_1 : il existe $P \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}A_1P = B_1$ où $diag(B_1) = (0, 0, ..., 0)_{n-1}$.

La matrice à blocs diagonaux $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$est inversible et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$.

Par produit des blocs, on vérifie que $Q^{-1}A'Q = B$ s'écrit $B = \begin{pmatrix} 0 & L_2 \\ C_2 & B_1 \end{pmatrix}$ où $L_2 = L_1P$ et $C_2 = P^{-1}C_1$. La matrice B étant à diagonale nulle, $\mathcal{P}(n)$ est démontrée.

3.

a) $A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$de trace nulle. $\left\{\begin{array}{c} u(E_1) = E_1 \\ u(E_2) = -E_2 \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{c} E_1' = E_1 + E_2 \\ E_2' = E_1 - E_2 \end{array}\right.$ vérifient

$$B = Mat_{(E_1', E_2')}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) De même, $A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$conduit à $B = Mat_{(E_1', E_2', E_3')}(u) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$avec $\left\{\begin{array}{c} E_1' = E_1 + E_3 \\ E_2' = E_2 \\ E_3' = E_1 - E_3 \end{array}\right.$

4. Soit A non scalaire et $\boxed{t = tr(A)}$.

La matrice $A_0 = A - tI$ n'est pas scalaire et, comme en **2.a),** il existe une base $\mathcal{X} = (X_1, X_2 ..., X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $A_0 X_1 = X_2$ ce qui prouve que A_0 est semblable à $A_0' = Mat_{\mathcal{X}}(u - tId) = \begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ C_1 & A_1 \end{pmatrix}$où

$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{n-1,1}(\mathbb{R})$, $L_1 \in M_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$.

En conséquence, A est semblable à $A_0' + tI = \begin{pmatrix} t & L_1 \\ C_1 & B_1 \end{pmatrix}$où $B_1 = A_1 + tI_{n-1}$ et $t = tr(A) = tr(A_0' + tI) = t + tr(B_1)$ livre $\boxed{tr(B_1) = 0}$. On applique ensuite la question **2** à la matrice B_1 de trace nulle: ainsi, B_1 est semblable à une matrice $B_2 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $diag(B_2) = (0, 0, ..., 0)_{n-1}$. Il en résulte que A est semblable à une matrice de la forme $B = \begin{pmatrix} t & L_2 \\ C_2 & B_2 \end{pmatrix}$dont la diagonale est $(t, 0, ..., 0)_n$ où

$$\boxed{t = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

.

5. Soit $A \in M_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

- $\underline{1^{er} cas : t = tr(A) \neq 0}$. La matrice $A' = A - \frac{t}{n} I$ étant de trace nulle, on la sait (d'après **2.**) semblable à une matrice $B' \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $diag(B') = (0, 0, ..., 0)$ et, par suite, A est semblable à $B = B' + \frac{t}{n} I$ dont la diagonale est $\left(\frac{t}{n}, \frac{t}{n}, ..., \frac{t}{n}\right)$.
- $\underline{2^{me} cas : t = tr(A) = 0}$.
  Dans ce cas A n'est pas scalaire (car $A \neq 0$). En appliquant la méthode de la question 4 à $A - I$ on montre que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ C_1 & B_1 \end{pmatrix}$, avec $tr(B_1) = -1$. B_1 est donc semblable à une matrice B_2 telle que $diag(B_2) = \left(\frac{-1}{n-1}, \cdots, \frac{-1}{n-1}\right)$ d'après le premier cas. A est donc semblable à $\begin{pmatrix} 1 & L_2 \\ C_2 & B_2 \end{pmatrix}$ solution du problème.