EPITA 2008

L'EPITA est une école d'informatique qui recrute après deux ans de CPGE quelque soit la filière. . Les épreuves sont donc adaptées pour être accessibles aux étudiants de toutes les filières.

résultat préliminaire

a) Soit $P = E_{i,k}$, $Q = E_{k,j}$ et $R = PQ$. On a

$$\forall (a,b) \in [[1,p]]^2 \;\; R_{a,b} = \sum_{c=1}^{p} p_{a,c} q_{c,b}$$

Or le seul terme non nul est $p_{i,k} = 1$ et $q_{k,j} = 1$et donc

$$\begin{array}{c} \text{si } a \neq i \text{ ou } b \neq j \text{ , } r_{a,b} = 0 \\ \text{si } a = i \text{ et } b = j \text{ , } r_{a,b} = 1 \end{array}$$

et donc $R = E_{i,j}$.
Si on fait le produit $E_{i,h}E_{k,j}$ pour $h \neq k$ on ne peut pas avoir à la fois $c = h$ et $c = k$ donc tous les coefficients sont nuls.

$$\boxed{E_{i,h}E_{k,l} = \delta_{h,k}E_{i,j}}$$

b) On a donc

$$E_{x,y}A = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}E_{x,y}E_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} a_{y,j}E_{x,j}$$

toutes les lignes du produit sont nuls , sauf la ligne x qui contient la ligne y de A
et de même :

$$AE_{x,y} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}E_{i,j}E_{x,y} = \sum_{i=1}^{p} a_{i,x}E_{i,y}$$

La colonne y du produit contient la colonne x de A , les autres étant nulles.
c) On veut $\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $AM = MA$. Comme l'application $M \longmapsto AM - MA$ est linéaire il suffit de vérifier l'égalité sur la base $E_{x,y}$. On veut donc :

$$\forall (x,y) \in [[1,p]]^2 \text{ , } \sum_{j=1}^{p} a_{y,j}E_{x,j} = \sum_{i=1}^{p} a_{i,x}E_{i,y}$$

Et donc comme on a une base : $\forall j \neq y$, $a_{y,j} = 0$, $\forall i \neq x \; a_{i,x} = 0$ et pour $i = x$ et $y = j$: $a_{y,y} = a_{x,x}$
Comme (y,j) peut décrire tous les couples tels que $j \neq y$ on a : $\forall j \neq y$, $a_{y,j} = 0$ donc A est diagonale . la condition $\forall (x,y) \in [[1,p]]^2$, $a_{y,y} = a_{x,x}$ donne les termes diagonaux égaux.

Réciproquement si $A = \lambda I_p$ on a bien $AM = MA = (\lambda M)$ pour toute matrice M .

$$\boxed{(\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \text{, } AM = MA) \Longleftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ , } A = \lambda I_p)}$$

Partie 1

1. étude générale

   a) On vérifie que pour tout $(M,N) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})^{\;2}$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$:

$$\begin{aligned} d_A(\lambda M + \mu N) &= A(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)A = \lambda AM + \mu AN - \lambda MA - \mu AN \\ &= \lambda(AM - MA) + \mu(AN - NA) = \lambda d_A(M) + \mu d_A(N) \end{aligned}$$

   et comme d_a va de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ c'est un endomorphisme.

   b)

   - On constate que $Tr(AM - MA) = 0$, toute matrice de trace non nulle n'est pas dans l'image : **non surjectif**.
   - On constate que I_p est une matrice non nulle du noyau de d_A :**non injectif**
     Une seule des deux remarques suffit à prouver les 2 car on est en dimension finie.
   - d'après le préliminaire $d_A = 0$ si et seulement si il existe $\lambda \in K$ **,** $A = \lambda I_P$

c) vérification par le calcul : $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})^2$ on a

$$d_A(MN) = AMN - MNA$$

et

$$\begin{aligned} d_A(M)N + Md_A(N) &= (AM - MA)N + M(AN - NA) \\ &= AMN - MAN + MAN - MNA \\ &= AMN - MNA \end{aligned}$$

2. cas où A est diagonalisable

a) Si A est diagonalisable, il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ on a alors ${}^tA = QDQ^{-1}$ avec $Q = \left({}^tP\right)^{-1}$ et donc ${}^tA$ est diagonalisable.

b) On a ${}^t(A - \lambda I_p) = {}^tA - \lambda I_p$. une matrice et sa transposée ont le même déterminant et donc

$$P_A(\lambda) = P_{\ {}^tA}(\lambda)$$

c) Par définition $AV_i = \lambda_i V_i$ et ${}^tW_j A = {}^t\left({}^tAW_j\right) = {}^t(\lambda_j W_j) = \lambda_j {}^tW_j$ ..

On vérifie que $V_i{}^tW_j$ est le produit d'une colonne par une ligne et donc que $V_i{}^tW_j \in \boldsymbol{M}_p(\mathbb{K})$. le calcul donne alors :

$$\begin{aligned} d_A\left(V_i{}^tW_j\right) &= AV_i{}^tW_j - V_i{}^tW_jA = \lambda_i V_i{}^tW_j - \lambda_j V_i{}^tW_j \\ &= (\lambda_i - \lambda_j)\, V_i{}^tW_j \end{aligned}$$

Si $V_i{}^tW_j \neq 0$ on a un vecteur propre de d_A pour la valeur propre $\lambda_i - \lambda_j$

d) Pe_i est la $i-ème$ colonne de P donc $Pe_i = V_i$, et $Qe_i = W_i$.

Si $U = e_i{}^te_j$, U est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de coefficients $U_{x,y} = \begin{cases} 1 \text{ si } x = i, y = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et donc $E_{i,j} = e_i{}^te_j$

On a donc $\phi(E_{i,j}) = Pe_i{}^t(Qe_j) = V_i{}^tW_j$

e) ϕ est bien linéaire car pour tout $(M,N) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})^{\ 2}$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$

$$\phi(\lambda M + \mu N) = P(\lambda M + \mu N)^t Q = \lambda PM^tQ + \mu PN^tQ = \lambda\phi(M) + \mu\phi(N)$$

le noyau de ϕ contient les matrices M tels que $PM^tQ = 0$. Mais P et Q sont inversibles (changements de base) . on peut multiplier à gauche par P^{-1} et à droite par ${}^tQ^{-1}$ et donc $M = 0$

Le noyau de ϕ est réduit à $\{0\}$. ϕ est donc un endomorphisme injectif en dimension finie. Ce qui prouve que ϕ est un automorphisme.

L'image de la base $(E_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq p}$ est donc aussi une base. $\left(V_i^tW_j\right)_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq p}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

f) En reprenant le résultat du point **c)** on a une base de vecteurs propres.

$$\boxed{d_A \text{ est diagonalisable et les valeurs propres sont } \{\lambda_i - \lambda_j\}_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq p}}$$

Une base de vecteur propre sont les matrices $\left(V_i^tW_j\right)_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq p}$. Mais je ne vois comment répondre à la question de donner ses vecteurs propres (tous).

En effet si $\lambda_i - \lambda_j = \lambda_k - \lambda_l$ alors $V_i^tW_j$ et $V_k^tW_l$ sont vecteurs propres pour la même valeur propre et donc tout vecteur combinaison linéaire de ces deux vecteurs sera aussi vecteur propre.

Partie 2

1. propriétés de la trace;

que des questions de cours

2. trace d'un projecteur

a) On a $M^2 - M = 0$, donc $X^2 - X = 0$ est un polynôme annulateur de M . les valeurs propres vérifient donc $\lambda^2 - \lambda = 0$ donc $\lambda \in \{0,1\}$

b) On veut prouver une somme directe :

- Analyse : Soit $x \in \mathbb{K}^p$, on cherche à décomposer $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker}(M - I_p)$ et $z \in \operatorname{Ker}(M)$. On multiplie par M ; on a donc $Mx = My + Mz = y + 0$

  Si une décomposition existe $y = Mx$ et $z = x - Mx$. On a donc unicité de la décomposition si elle existe.
- Vérification . pour $x \in \mathbb{K}^p$ on pose $y = Mx$ et $z = x - Mx$. On vérifie que:
  - $x = y + z$,
  - $(M - I_p)\, y = M^2 y - My = My - My = 0$ (car $M^2 = M$) et donc $y \in \operatorname{Ker}(M - I_p)$
  - $Mz = M\,(x - Mx) = Mx - M^2 x = 0$ et donc $z \in \operatorname{Ker}(M)$

c) $\operatorname{Ker}(M)$ et $\operatorname{Ker}(M - I_p)$ sont les sous espaces propres associés aux valeurs propres 0 et 1 . $\mathbb{K}^p$est somme directe de sous espaces propres donc M est diagonalisable. Il existe donc une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $M = PDP^{-1}$. la matrice D contient sur la diagonale les valeurs propres .

d) Le r du sujet est le nombre de coefficients diagonaux non nuls d'une matrice diagonale donc le rang de la matrice D. Deux matrices semblables ont même rang donc $rg(M) = r$

Mais la trace de M donc de D est la somme des termes diagonaux de D , donc r

$$\boxed{M^2 = M \Rightarrow tr(M) = rg(M)}$$

Avec le programme PC ont peut gagner du temps : $X^2 - X$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples donc M est diagonalisable ....

3. Etude de F

a) Dans la relation $d(MN) = d(M)N + Md(N)$ on peut prendre $M = N = I_p$: $d(I_p) = 2d(I_p)$ et donc $d(I_p) = 0_p$

b)

- On vient déjà de calculer $d(I_p) = 0_p$ donc $F(I_p) = I_{2p}$
- pour tout $(M, N) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})^{\ 2}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ on a $d(\lambda M + \mu N) = \lambda d(M) + \mu d(N)$ car d est un endomorphisme et donc :

$$\begin{aligned} F\left(\lambda M + \mu N\right) &= \begin{pmatrix} \lambda M + \mu N & \lambda d(M) + \mu d(N) \\ 0_p & \lambda M + \mu N \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} M & d(M) \\ 0_p & M \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} N & d(N) \\ 0_p & N \end{pmatrix} \\ &= \lambda F(M) + \mu F(N) \end{aligned}$$

- Enfin

$$\begin{aligned} F(M)F(N) &= \begin{pmatrix} M & d(M) \\ 0_p & M \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} N & d(N) \\ 0_p & N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} MN & Md(N) + d(M)N \\ 0_p & MN \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} MN & d(MN) \\ 0_p & MN \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  d'après l'hypothèse supplémentaire sur D .

c) d'après les calculs préliminaires $E_{i,i} = E_{i,j}E_{j,i} = E_{i,j}E_{j,j}E_{i,i}$. On peut appliquer F et utiliser le morphisme d'algèbre :

$$F(E_{i,i}) = F(E_{i,j}E_{j,j}E_{j,i}) = F(E_{i,j})F(E_{j,j})F(E_{j,i})$$

D'après la propriété donnée sur le rang . le rang d'un produit est inférieur au rang de chaque facteur. En particulier $rg(F(E_{i,i}) \leq rg(F(E_{j,j}))$

Mais i et j jouent des rôles symétriques. On a donc aussi $rg(F(E_{j,j}) \leq rg(F(E_{i,i})$ et donc

$$rg(F(E_{j,j}) = rg(F(E_{i,i})$$

d) On a toujours avec le préliminaire $E_{i,i}E_{i,i} = E_{i,i}$ et donc comme F est un morphisme d'algèbre $F(E_{i,i}).F(E_{i,i}) = F(E_{i,i})$ et donc on a bien

$$\left(F(E_{i,i})\right)^2 = F(E_{i,i})$$

e) On a aussi $\sum_{i=1}^{p} E_{i,i} = I_p$ donc comme F est linéaire $\sum_{i=1}^{p} F(E_{i,i}) = F(I_p)$. Le calcul de $F(I_p)$ a été fait au **a)**

$$\sum_{i=1}^{p} F(E_{i,i}) = I_{2p}$$

On a donc

$$\begin{aligned} 2p &= Tr(I_{2p}) = \sum_{i=1}^{p} Tr(F(E_{i,i})) \text{ par linéarité de la trace} \\ &= \sum_{i=1}^{p} rg\left(F(E_{i,i})\right) \text{ question } \mathbf{2} \\ &= \sum_{i=1}^{p} rg\left(F(E_{1,1})\right) \text{ question } \mathbf{3.c)} \\ &= prg(F(E_{1,1})) \end{aligned}$$

On a donc $rg(F(E_{1,1})) = 2$ et donc

$$\forall i \in [[1, p]] \ , rg(F(E_{i,i})) = 2$$

4. Une base adaptée de $\mathbb{K}^{2p}$

a) On vient de voir que $F(E_{1,1}))$ est une matrice de rang 2 . Son image est de dimension 2 . On peut donc prendre une base (u, v) de cardinal 2 de l'image.

Mais $F(E_{1,1})$ est un projecteur . Donc les vecteurs de l'image sont invariants par l'application. $F(E_{1,1})u = u$, $F(E_{1,1})v = v$

b)

- si $j = k$ on a $E_{1,k}E_{k;1} = E_{1,1}$. F est un moprhisme d'algèbre donc $F(E_{1,k})F(E_{k,1})u = F(E_{1,k}E_{k,1})u = F(E_{1,1})u = u$
- si $j \neq k$ on a $E_{1,k}E_{k;1} = 0_p$ et donc le même calcul donne $F(E_{1,k})F(E_{k,1})u = 0_{2p}$
- Même chose pour v.

Vérifions qu'on a une base :

- le cardinal est le bon : $2p$ objets en dimension $2p$
- la famille est libre . supposons :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i F(E_{i,1})u + \sum_{i=1}^{p} \beta_i F(E_{i,1})v = 0_{2p}$$

  Pour tout k on peut multiplier à gauche par $E_{1,k}$ il reste

$$\alpha_k u + \sum 0_{2p} + \beta_k v + \sum 0_{2p} = 0_{2p}$$

  et donc comme (u, v) est libre on a pour tout k , $\alpha_k = \beta_k = 0$

$$\boxed{\text{La famille } (F(E_{i,1})u, F(E_{i,1})v)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p} \text{ est une base de } \mathbb{K}^{2p}}$$

c) Par morphisme on a

$$\begin{aligned} F(M)F(E_{k,1})u &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} m_{i,j}\left(F(E_{i,j})F(E_{k,1})u\right) \\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} m_{i,j}\left(F(E_{i,j}.E_{k,1})u\right) \end{aligned}$$

si $j \neq k$ le terme est nul car $E_{i,j}.E_{k,1} = 0$

$$F(M)F(E_{k,1})u = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} (F(E_{i,j})F(E_{k,1})u) = \sum_{i=1}^{p} m_{i,k} F(E_{i,1})u$$

De même

$$F(M)F(E_{k,1})u = \sum_{i=1}^{p} m_{i,k} F(E_{i,1})u$$

d) $F(M)$ est la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{K}^{2p}$ dans la base canonique . La matrice $P^{-1}F(M)P$ est la matrice du même endomorphisme dans la base $((F(E_{i,1})u, F(E_{i,1})\,v)$

- On prend $k = 1$ dans la question précédente : L'image du premier vecteur de base est celle de $F(E_{1,1})u$ c'est donc $F(M)F(E_{1,1})u = \sum_{i=1}^{p} m_{i,1} F(E_{i,1})u$..
  Les coordonnées sur les p premiers vecteurs de base (les $F(E_{i,1})u$) sont les $m_{i,1}$, et les coordonnées sur les autres (les $F(E_{i,1})v$) sont nuls. La première colonne de $P^{-1}F(M)P$ est donc $\begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{p,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
- De même la $k-ème$ colonne est l'image de $F(E_{k,1})u$ c'est donc $F(M)F(E_{k,1})u = \sum_{i=1}^{p} m_{i,k} F(E_{i,1})u$. C'est donc la $k-ème$ colonne de M suivi de 0
- Pour la seconde moitié de la matrice c'est symétrique avec des 0 comme coefficients sur les $F(E_{i,j})u$ et les coefficients de M sur les $F(E_{i,j})v$.

5. Conclusion

a) On transforme la relation précédente en écrivant $F(M)P = P \begin{pmatrix} M & 0_p \\ 0_p & M \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} M & d(M) \\ 0_p & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$

. le produit par blocs donne les 4 relations :

$$MA + d(M)C = AM, MB + d(M)D = BM, MC = CM, MD = DM$$

En changeant le membre on a les relations voulues.

b) La base est indépendante de M , donc aussi P, A, B, C, D .

On peut appliquer deux fois le préliminaire : $\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $MC = CM$ donc il existe un scalaire γ tel que $C = \gamma I_p$ et de même il en existe un δ tel que $D = \delta I_p$

c) si $\gamma = \delta = 0$ alors les p dernières lignes de P sont nuls et donc $rg(P) \leq p$ et P n'est pas inversible : absurde.

d) si $\gamma \neq 0$ on déduit de $d(M)C = AM - MA$ que $d(M) = \frac{A}{\gamma}M - M\frac{1}{\gamma}$ et donc $X = \frac{A}{\gamma}$.

si $\delta \neq 0$ $X = \frac{B}{\delta}$