Lycée Faidherbe, 2019-2020

Cours d'informatique

MPSI & PCSI

Version du 16 mars 2020

Table des matières

Chapitre I

Présentation

1 Qu'est-ce que l'informatique ?

La Société Informatique de France (SIF) propose la définition suivante.

Définition : informatique

L'informatique est la science et la technique de la représentation de l'information d'origine artificielle ou naturelle, ainsi que des processus algorithmiques de collecte, stockage, analyse, transformation et communication de cette information, exprimés dans des langages formels ou des langues naturelles et effectués par des machines ou des êtres humains, seuls ou collectivement.

Cette définition, très structurée, mérite des éclaircissements.

Information L'informatique à pour objet l'information. Cela peut sembler une évidence quand on regarde l'étymologie mais le nom anglais, **computer science**, ne le laissait pas deviner. Lorsque plusieurs processus ou agents interagissent dans la poursuite d'un but commun ils doivent échanger de l'information. L'informatique est ce qui permet ces échanges d'informations.

Machines L'informatique utilise des machines, les ordinateurs.

Mais l'informatique n'est pas **que** la science des ordinateurs : de la même manière que l'astronomie n'est pas que la science des télescopes. Passés les premiers temps héroïques où les prouesses nouvelles des machines nous émerveillaient, l'informatique nous permet de comprendre ce que font les ordinateurs et ce qu'ils ne peuvent pas faire. L'informatique est ce qui rend possible l'existence et l'usage des ordinateurs.

Les ordinateurs sont des machines rapides et fiables : ils permettent d'automatiser des tâches fastidieuses et répétées. En ce sens on peut en voir l'origine dans les machines automatiques : les calculatrices mécaniques, le métier à tisser Jacquard, les orgues de Barbaries, ...Mais une évolution remarquable est que les ordinateurs ne sont pas spécialisés dans un travail unique : ils sont programmables. La première tâche d'un ordinateur est de recevoir les instructions qu'il aura à exécuter.

Langages On a donc besoin d'un langage commun entre les humains et les machines : un langage informatique est le moyen de traduire nos instructions à une machine. Comme celle-ci manque cruellement d'imagination et d'anticipation nous sommes contraints de faire un travail de formalisation qui nous permet de décomposer en tâches simples le travail que nous souhaitons faire faire à l'ordinateur.

Science et technique L'informatique est une science : elle produit des énoncés qui seront évalués selon le critère de vérité. La science informatique est née au début du vingtième siècle par les résultats de mathématiciens (Turing, Gödel, Curry, ...) qui cherchaient à déterminer les calculs mathématiques qui sont **effectivement** réalisables, c'est-à-dire représentables par un algorithme avec le vocabulaire actuel.

La science informatique ne peut être séparée de la question de la réalisation effective : elle cherche à savoir ce qui peut être fait et cherche à faire ce qui peut être fait.

Autres sciences Comme son objet est l'information l'informatique est étroitement liée aux autres sciences.

Elle étudiera souvent les mêmes phénomènes que d'autres sciences mais *différemment*.

Un exemple : les images.

- Un physicien étudie les images sous forme de propagation de rayons lumineux. Cela permet la construction de verres qui corrigent la vue ou de lentilles pour les appareils photo.
- Avec la photo argentique, la chimie permet la reproduction d'images sur une surface par dépôt de pigments colorés qui se fixent sur la surface.
- Les géomètres mathématiciens s'intéressent aux formes qui constituent les images dans le plan ou dans l'espace (et généralisent ensuite dans des espaces plus généraux).
- Les médecins soignent les problèmes de l'œil et des nerfs optiques qui nous permettent de voir les images.
- L'informatique appréhende les images en les *pixélisant* elle en traduit l'information, ce qui permet de la transmettre, la reproduire, la compresser, la transformer, la caractériser ....

Les appareils photo numériques apparus il y a une vingtaine d'années sont le fruit des efforts conjoints de physiciens et d'informaticiens

1.1 Qu'est-ce qu'un ordinateur ?

C'est un truisme de dire aujourd'hui que les ordinateurs sont partout : des machines installées sur un bureau aux serveurs dans des salles climatisées, mais aussi dans les téléphones, les télévisions, les appareils photos, les liseuses, les voitures... et avec la généralisation des «objets connectés», on en trouve jusque dans les ampoules.

Tant et si bien que l'on peut ressentir une certaine confusion en tentant de préciser ce qu'est un ordinateur. On peut commencer par lister les éléments communs suivants :

- il reçoit des informations par l'intermédiaire d'un utilisateur ou d'un réseau ;
- il émet des informations via le réseau ou un de ses périphériques ;
- il a besoin d'une source d'énergie pour fonctionner.

Néanmoins cette première tentative s'avère infructueuse, car il n'est pas difficile de trouver des contre-exemples : un scooter nécessite une source d'énergie, il reçoit des informations de la part de son conducteur, il en émet sous la forme de signaux lumineux indiquant le niveau d'huile, de carburant... mais ce n'est pas un ordinateur.

En fin de compte, ce qui caractérise un ordinateur est plutôt sa capacité à *mener des calculs*. D'ailleurs, le terme *computer* est lié en Anglais au verbe *to compute* : calculer.

Nous allons partir d'un ordinateur tel qu'il se présente aujourd'hui sous sa forme la plus reconnaissable (un «ordinateur personnel») et survoler le rôle de chacun de ses composants, avant de plonger dans les détails et de revenir sur les interrogations ci-dessus.

2 Soulevons le capot !

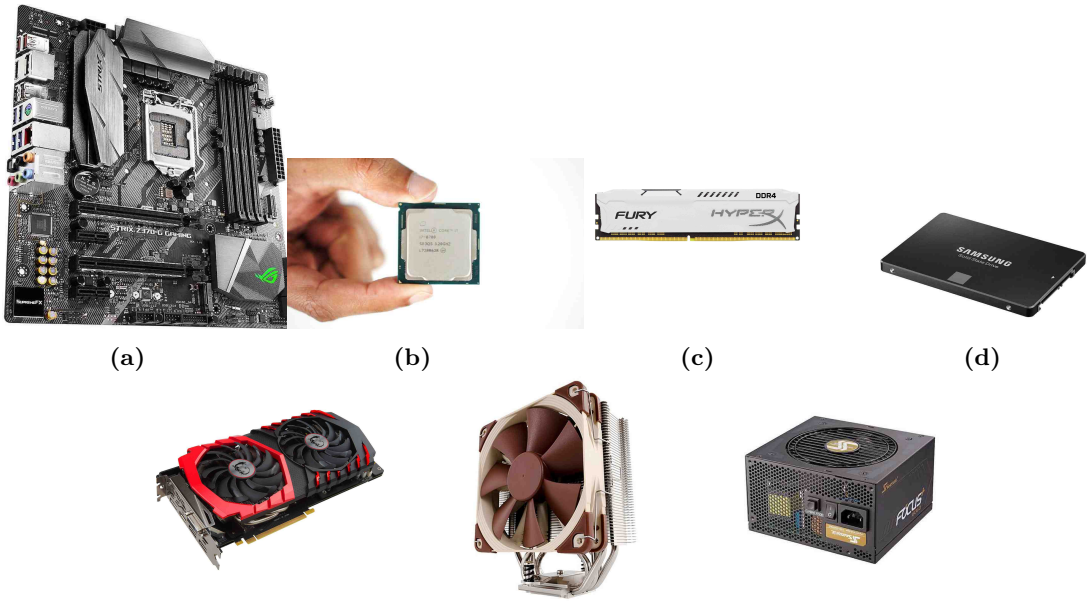
2.1 De multiples périphériques et composants

Clavier, disque dur, clef USB, carte graphique... Tout le monde a entendu ces termes, mais n'est pas forcément au fait de la manière dont ils s'articulent et communiquent pour accomplir leur fonction.
Passons sur les «périphériques externes», que tout le monde connaît au moins de vue (figures I.1a à I.1d). Leur fonction est en général plutôt intuitive (mais leur fonctionnement, lui, beaucoup moins !) Concentrons-nous la partie qui reste en général hors de vue, à l'intérieur du boîtier.

(a) **(b)** **(c)** **(d)**

Figure I.1 – a) Clavier, b) souris, c) micro-casque, d) imprimante et scanner.

Les figures I.2a à I.2g montrent des pièces détachées avec lesquelles on va pouvoir assembler un ordinateur. Il est intéressant de remarquer que, avec un peu de débrouillardise et de connaissance, il



(a) **(b)** **(c)** **(d)**

(e) **(f)** **(g)**

Figure I.2 – a) Carte-mère, b) processeur central, c) barrette de RAM, d) disque dur, e) carte graphique, f) dissipateur thermique surmonté d'un ventilateur (*ventirad*), g) alimentation.

n'est pas difficile de réaliser soi-même l'assemblage d'un ordinateur à partir des ces pièces détachées. Cela ne nécessite en fait pas vraiment de savoir *comment* fonctionne un ordinateur.
Ce fait remarquable résulte de la très grande *normalisation* des ordinateurs : chaque composant réalise des tâches bien déterminées et communique de manière pré-établie, de sorte que l'ordinateur sait précisément quoi lui demander et quoi en attendre, sans que l'utilisateur n'ait à intervenir.

2.2 Et si on les assemble ?

Les pièces ci-dessus, une fois assemblées dans un boîtier adapté, donnent l'ordinateur des figures I.3a et I.3b. Bien sûr, un tel assemblage n'a rien de compact, et un ordinateur portable ou un téléphone

n'est pas fait comme ça. Néanmoins, les éléments constitutifs sont toujours les mêmes. L'exemple traité ici a le mérite de permettre de les observer séparément. On remarque que les divers com-

(a) **(b)**

Figure I.3 – Un PC assemblé en tour : a) intérieur, b) arrière.

posants sont presque tous connectés à un même élément qui occupe toute la surface d'un flanc de la tour. C'est la *carte-mère* (figure I.2a), qui joue le rôle de *matrice de communication* : elle comporte de nombreux connecteurs sur lesquels viennent se brancher tous les autres composants et par lesquels ils pourront communiquer entre eux. On y trouve :

- des connecteurs *externes*, en haut à gauche sur la figure I.3b, que même les utilisateurs non spécialistes connaissent (USB pour brancher clavier et souris, jack pour brancher des enceintes, etc) ;
- des connecteurs *internes*, pour les composants situés à l'intérieur de la tour qui ne sont pas destinés à être branchés et débranchés fréquemment.

Les divers types de connecteurs diffèrent non seulement par leur forme, mais aussi par leurs caractéristiques physiques (électriques, mécaniques ou thermodynamiques). Certains sont optimisés pour laisser passer de gros débits de données, d'autres peuvent transporter des courants électriques intenses pour permettre la recharge d'une batterie, etc.

2.3 Le cheminement des données

Alice [1] vient de saisir un texte et elle tape le raccourci clavier déclenchant sa sauvegarde sur le disque dur de l'ordinateur. Elle s'attend donc à deux choses : d'abord que son document soit enregistré, ensuite qu'il y en ait une confirmation visuelle à l'écran. Quel est le chemin pris par les données au cours de cette opération ?

Un peu de vocabulaire

Quand un composant peut communiquer avec d'autres, il dispose d'un *contrôleur*. C'est un élément électronique qui sert d'interface avec l'extérieur et orchestre les communications.
Comme les flux de données allant d'un composant à l'autre peuvent entrer ou sortir des composants, on parle de flux d'*entrée/sortie* ou I/O (pour Input/Output).

1. Dans certains domaines de l'informatique, on a estimé peu conviviales les appellations «utilisateur A» et «utilisateur B» dans les exemples, et de là est née la tradition de les appeler Alice et Bob.

Bien que ce ne soit pas une règle absolue, on classe en général les I/O en deux catégories, les «lents» et les «rapides», qui ne sont pas gérées par les mêmes contrôleurs.
Le canal de communication entre deux composants s'appelle un *bus*.

Exemple

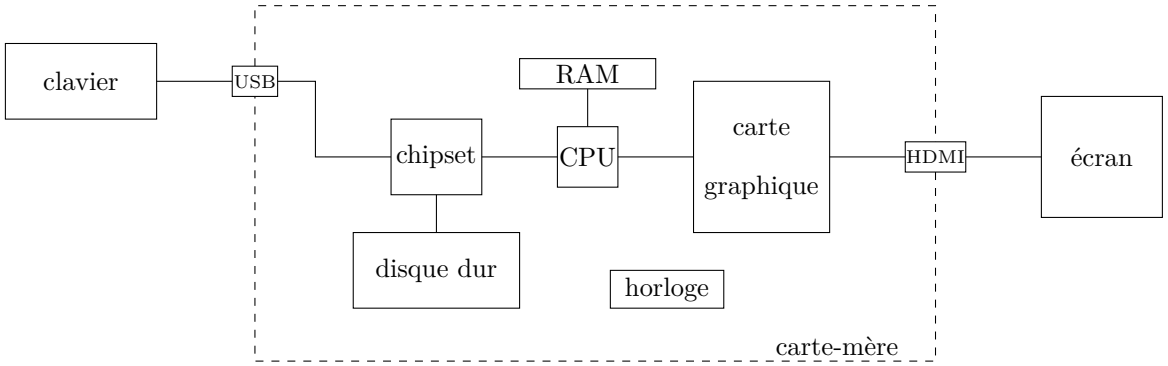


Figure I.4 – Architecture typique d'un ordinateur personnel (bien sûr, il existe des variantes).

Suivons les flux de données sur le schéma de la figure I.4.
Sur la carte-mère, les contrôleurs I/O «lents» sont regroupés dans le chipset,[2] tandis que les contrôleurs I/O «rapides» sont dans le CPU.[3]
Gardez en tête que les diverses étapes ci-dessous ne se font pas toutes seules. Le système d'exploitation intervient fortement pour traiter les données et coordonner leurs échanges.

1. L'information «une touche du clavier a été pressée» arrive donc par le connecteur (typiquement USB) sur lequel le clavier est branché.
   Ce flux est donc reçu par le contrôleur situé dans le chipset.
   Mais l'histoire ne s'arrête pas là : l'écran n'est pas relié au chipset, l'endroit où est mémorisé le document d'Alice non plus, et l'ordinateur ne comprend pas «automatiquement» ce que veulent dire les touches enfoncées par Alice...
2. L'information est envoyée vers le contrôleur du *processeur central* (CPU, représenté seul figure I.2b et caché sous le ventilateur central sur la figure I.3a).
   Une fois qu'il a reçu notre flux de données, le processeur va devoir faire des calculs pour les traiter, afin de comprendre et d'accomplir sa tâche. Mais pour cela, dans quelle partie de l'ordinateur se trouve le document tant qu'il n'a pas été enregistré ?
3. La réponse est, dans la *mémoire vive* (RAM : Random Access Memory). Composant rapide relié au processeur, cet espace de stockage est caractérisé par sa volatilité.[4] La RAM se présente physiquement sous la forme de barrettes, comme représenté figure I.2c et que l'on voit à droite du processeur sur la figure I.3a.
4. Le CPU doit maintenant orchestrer le transfert des données depuis la RAM vers le disque dur[5] (figure I.2d). Ce dernier est bien sûr un dispositif de stockage ; comparé à la RAM, il est notablement plus lent mais les données y sont *persistantes* (elles survivent à une coupure de courant). S'il est d'un modèle courant, le disque dur est connecté au contrôleur du chipset.
   Le document d'Alice est enfin enregistré !
5. Reste à mettre à jour l'affichage pour informer Alice que l'enregistrement a été effectué. Le CPU possède aussi un contrôleur relié à la *carte graphique*, représentée figure I.2e. Composant très complexe capable de mener ses propres calculs, c'est sur elle que l'écran est branché : elle s'occupe donc du traitement et de la mise en forme des données vidéo.[6]

2. Le contrôleur lui-même s'appelle le *southbridge*.
3. Collectivement appelées *northbridge*.
4. Les données n'y sont pas stockées durablement. Une coupure de courant même très brève suffit à perdre tout son contenu, comme beaucoup de gens en ont déjà fait l'amère expérience !
5. En toute rigueur, l'appellation de «disque» n'est plus vraiment appropriée, les nouveaux modèles ne comportant plus de plateau tournant, ni même la moindre pièce mobile. Il vaut mieux parler de lecteur (*drive* en Anglais).
6. Par le passé, le CPU s'en occupait directement, mais c'est une tâche intensive faisant appel à des méthodes

Notons que la plupart de ces opérations sont menées en suivant un rythme précis fourni par un composant de la carte-mère appelé *horloge*.

2.4 L'horloge

Ce composant situé sur la carte-mère (figure I.5) contient un cristal piézoélectrique. Ce matériau possède deux caractéristiques spécifiques :

- C'est un oscillateur mécanique, capable de se contracter et de se dilater à une fréquence qui lui est propre (sa *fréquence de résonance*, déterminée par sa fabrication).
- Quand il est soumis à une tension électrique, il réagit en se mettant à osciller mécaniquement. Réciproquement, quand il oscille mécaniquement, il produit une tension oscillante à ses bornes.

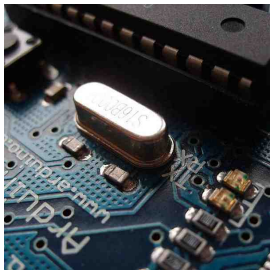


Figure I.5 – Horloge dans la carte-mère.

L'astuce est de prélever la tension qu'il produit par ses oscillations mécaniques naturelles, de l'amplifier et de la réappliquer à ses bornes, ce qui «régénère» les oscillations mécaniques. Si l'amplification est suffisante pour compenser les pertes énergétiques, les oscillations deviennent *entretenues* et le cristal devient la source d'un signal parfaitement périodique sur lequel beaucoup d'opérations se calent.

2.5 Considérations thermiques

Il est bien connu qu'un composant électronique a tendance à chauffer. Plus il est sollicité, plus il est amené à travailler vite, et les courants électriques circulant dedans produisent de la chaleur par effet Joule. Une température excessive peut perturber les calculs et, dans des cas extrêmes, endommager le composant. [7]

À titre d'exemple, le dégagement de chaleur d'un processeur de moyenne gamme en pleine charge peut approcher 100 W, avec une température atteignant les 80 °. [8] On comprend que, dans les entreprises, les salles informatiques soient thermo-régulées ! [9]

Les figures I.3a et I.3b montrent les points clefs de la stratégie de gestion des flux thermiques :

- Tous les composants dégageant de la chaleur (carte graphique, processeur central, chipset) sont coiffés d'une pièce métallique appelée *dissipateur thermique* (figure I.2f). Très bon conducteur thermique et taillé en multiples ailettes pour maximiser sa surface de contact avec l'air ambiant, il conduit la chaleur vers un ventilateur qui l'évacue vers l'intérieur de l'ordinateur.
- La tour elle-même est munie d'un ou plusieurs ventilateurs qui pompent la chaleur dégagée par les ventilateurs précédents et l'éjectent à l'extérieur du boîtier.
- L'ordinateur est branché sur le secteur et reçoit donc du 220 V alternatif, alors que les composants nécessitent une tension bien plus faible et continue. Il faut donc une *alimentation* (figure I.2g) qui va s'occuper de la conversion. Cela génère de la chaleur, ainsi qu'un rayonnement électromagnétique capable de perturber son environnement dans un rayon de quelques centimètres. L'alimentation est donc en général éloignée du reste de l'ordinateur (on la voit tout en bas de la figure I.3b).

de calcul très spécifiques, de sorte qu'on préfère en général la déporter vers une unité de calcul dédiée, la *carte graphique*.

7. Heureusement, beaucoup de composants sont munis de sondes thermiques pour se désactiver automatiquement en cas de surchauffe.

8. Les processeurs destinés à des machines intégrées, comme des ordinateurs portables ou des smartphones, sont conçus pour dégager beaucoup moins, au prix souvent de performances réduites.

9. Et si l'ordinateur est en plus muni d'une carte graphique puissante, le dégagement thermique peut être doublé, voire triplé.

3 Coder l'information

3.1 Exprimer une quantité d'information

L'unité élémentaire d'information est le bit (binary digit, chiffre binaire). Il n'a donc que deux valeurs possibles, 0 ou 1.
Un groupement de $8 = 2^3$ bits s'appelle un *octet* (*byte* en Anglais), de symbole B. [10]
On peut définir des multiples de l'octets comme pour n'importe quelle unité (par des puissances de 10), mais comme en informatique on travaille toujours en base 2, on peut aussi les définir par des puissances de 2. Remarquant que $2^{10} = 1024$:

Unité (base 2)	Valeur	Unité (base 10)	Valeur
kibi-octet (kiB)	1024 B	kilo-octet (kB)	1000 B
mébi-octet (MiB)	1024 kiB	méga-octet (MB)	1000 kB
gibi-octet (GiB)	1024 MiB	giga-octet (GB)	1000 MB
tébi-octet (TiB)	1024 GiB	téra-octet (TB)	1000 GB

Enfin, attention aux confusions de la langue courante. Par écrit les deux systèmes de notation sont globalement respectés (en tout cas dans le monde professionnel), à l'oral on a tendance à utiliser les appellations de la base 10 même quand on parle de la base 2. Donc prêtez attention au contexte !

3.2 Codage des valeurs

La manière dont est traduite une valeur en bits dépend de la nature de la variable, son **type**.
Le nombre de bits alloués gouverne le nombre maximal de valeurs différentes qui peuvent être utilisées. Les valeurs les plus courantes sont

Espace alloué	Nombre de valeurs différentes
8 bits	$2^8 = 256$
10 bits	$2^{10} = 10\,24$
12 bits	$2^{12} = 40\,96$
16 bits	$2^{16} = 65\,536$
24 bits	$2^{24} = 16\,777\,216$
32 bits	$2^{32} = 4\,294\,967\,296$
64 bits	$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$

Voici quelques utilisations typiques :

- 8 bits : codage d'une couleur dans les formats d'images et de vidéos (JPEG, Blu-ray ...)
- 10 bits : code d'une couleur dans certains formats d'images professionnels.
- 16 bits : codage des sons dans les formats audio grand public (CD, MP3 ...)
- 24 bits : codage des sons dans les formats audio professionnels (mastering).
- 32 bits : codage des entiers dans la plupart des langages de programmation.
- 64 bits : codage des flottants dans la plupart des langages de programmation.

Les types simples les plus utilisés sont les entiers, les flottants et les caractères.

Entiers

En première approche, on peut dire que les entiers sont stockés sous forme binaire dans l'espace mémoire alloué : l'entier n est représenté su p bits par la suite $(a_{p-1}, a_{p-2}, \ldots, a_1, a_0)$ de valeurs 0 ou 1 telle que $n = \sum_{k=0}^{p-1} a_k 2^k$ [11].
Il reste le problème de la représentation des entiers négatifs, nous y reviendront dans un chapitre ultérieur.
Cela limite les entiers à un intervalle de taille 2^p. Cependant, en théorie, Python est capable d'utiliser les entiers sans limite de valeur.

10. En France, on trouve souvent la notation o à la place de B, mais elle n'est pas reconnue internationalement.
11. C'est la représentation **big endian** ou **petitboutienne**, d'autres ordres des indices existent.

Flottants

La notion mathématique de réel n'a pas d'équivalent en informatique. En effet un nombre réel nécessite souvent un processus infini pour être défini (suite de ses décimales, suite qui tend vers le réel, etc) qu'on ne peut pas contenir dans une mémoire finie. On devra se contenter d'approximations.
Les valeurs approchant les nombres réels sont appelés *nombres flottants* pour rappeler que leur virgule «flotte», leur forme est semblable à la notation scientifique utilisée dans les sciences, par exemple $6,0210^23$. Si on suppose que l'on dispose de 8 chiffres significatifs le nombre précédent s'écrit $\frac{60200000}{10^7}10^{30}$, il peut être représenté par les entiers 60200000 et 30.
En Python, ces valeurs ont le type `float`. On les écrit avec un point à la place de notre virgule ; on peut aussi utiliser un exposant `e` qui signifie puissance 10 ; `898547e-5` signifie `8.98547`
Leur codage en mémoire utilise deux entiers, comme l'exemple ci-dessus que nous étudierons dans un chapitre ultérieur.

Caractères

De même chaque caractère est associé à un nombre entier que l'on peut coder dans la mémoire.
Il faut donc une table de correspondance entre les caractères et leurs représentations entières. Cela s'appelle un *encodage*.
L'encodage ASCII Le plus ancien encodage encore utilisé, l'ASCII 7 bits, ne contient que les caractères utilisés en Anglais. ASCII veut dire American Standard Code for Information Interchange : Code américain normalisé pour l'échange d'information.
Il contient $128 = 2^7$ caractères, donc chaque caractère peut être représenté par un entier sur 7 bits.
En pratique, l'unité élémentaire d'information en mémoire étant l'octet, un caractère se voit donc plutôt allouer 8 bits, le 8^e bit étant alors laissé à 0.
On y trouve les 26 lettres de l'alphabet latin en majuscules et minuscules, les principaux symboles de ponctuation et les chiffres arabes. Quelques exemples :

Caractère	Code	Caractère	Code
A	65	0	48
B	66	1	49
a	97	(	40

Il y a aussi des «caractères spéciaux» qui n'ont pas d'apparence mais sont utiles par exemple pour structurer une chaîne de caractères :

Caractère	Code	Représentation en Python
Nouvelle ligne	10	`\n`
Tabulation	9	`\t`

Par contre, l'ASCII 7 bits ne contient pas de caractères accentués, de lettres grecques, etc. [12] Du coup, dans la deuxième moitié du 20^e siècle, chaque pays a utilisé le 8^e bit pour étendre l'ASCII et y ajouter les caractères nécessaires pour sa ou ses langues.
Mais ces efforts n'ont pas été normalisés, conduisant à de multiples encodages variant selon les pays et les types d'ordinateurs, générant un casse-tête d'interopérabilité.
L'Unicode Il a fallu attendre les années 2000 pour voir se concrétiser un standard international recouvrant la grande majorité des besoins de toutes les langues : l'Unicode. De nos jours, l'Unicode est l'encodage par défaut de la majorité des ordinateurs usuels.
Tous les langages de programmation modernes savent manipuler des caractères en Unicode. [13]
Dans la variante UTF-8 de l'Unicode (la plus répandue), l'espace mémoire alloué à un caractère est variable, allant de 1 à 4 octets.
La distinction se fait sur les premiers bits :

- Si le premier bit est 0, alors le caractère occupe un octet. Il reste 7 bits pour le caractère lui-même, qui est alors encodé suivant la table ASCII 7 bits.

12. Ces limitations se retrouvent encore aujourd'hui, par exemple, dans certains communications par internet : il est bien connu qu'utiliser des lettres accentuées dans des mails ou des noms de fichier quand on communique avec des gens d'autres pays peut parfois créer des problèmes.
13. Python, depuis sa version 3, travaille nativement en Unicode.

- Si les trois premiers bits sont 110, alors il occupe 2 octets. L'octet suivant doit alors commencer par 10 (bits de continuité), ce qui laisse un total de 11 bits pour le caractère. Cette plage contient les caractères latins absents de l'Anglais, mais aussi d'autres alphabets (grec, hébreu, cyrillique, arabe...) Exemples :

Caractère	Code
¿	11000010 10111111
É	11000011 10001001
ψ	11001111 10001000

- Si les quatre premiers bits sont 1110, alors il occupe 3 octets. Retirant les bits de continuité, cela laisse 16 bits pour le caractère. On y trouve encore d'autres alphabets, le Braille, des écritures idéographiques comme le Chinois ou le Japonais, mais aussi les célèbres caractères Dingbats, des symboles de ponctuation et des symboles mathématiques. Exemples :

Caractère	Code
$\oint$	11100010 10001000 10101110

- Si les cinq premiers bits sont 11110, alors il occupe 4 octets, ce qui laisse 21 bits pour le caractère. On y trouve des langues anciennes, les notations musicales, et encore plus de symboles, en particulier les célèbres emoji. [14]

En fin de compte, la représentation Unicode permet d'inclure des *millions* de caractères différents. La majorité des valeurs binaires correspondantes ne sont d'ailleurs pas encore utilisées à ce jour.
Cette variabilité de l'espace mémoire alloué peut compliquer les traitements informatiques, mais elle permet de garder la compatibilité avec l'ASCII tout en optimisant l'espace mémoire occupé par une chaîne de caractères (inutile de prendre 4 octets par caractère si on n'écrit qu'en Français !)

4 Les langages

Double-cliquer sur une icône et déclencher ainsi le visionnage d'un film (par exemple) est une forme de programmation de très haut niveau. Le langage utilisé, à base d'icônes et de menus est l'aboutissement d'une évolution rapide de ces dernières décennies.
Si l'on veut faire exécuter à un ordinateur des instructions plus spécialisées on va utiliser un langage de programmation ; on écrit un texte qui va être traduit à l'ordinateur.

4.1 Programmer un calcul

Quand on programme un calcul à l'aide d'un langage de programmation «haut niveau» (par exemple Python), il n'est pas nécessaire de savoir quelles opérations sont câblées dans le processeur. En contrepartie, à un moment ou à un autre, [15] il est nécessaire de convertir le programme écrit par l'humain en un programme adapté aux caractéristiques de l'ordinateur.
Au bout du compte, un tel programme est nécessairement écrit en binaire. Mais il existe un langage «intermédiaire», qui nécessite de connaître les caractéristiques de l'ordinateur tout en restant (relativement) lisible par l'humain. C'est l'*assembleur*. [16]
Ci-dessous se trouve un court exemple d'addition programmée en assembleur x86_64, qui est l'assembleur des processeurs 64 bits placés dans la grande majorité des ordinateurs domestiques actuels. Un tel processeur possède des registres d'une taille de 64 bits dont le nom commence toujours par un `r`.
On peut donc avoir un contrôle très fin sur ce qui se passe : en spécifiant des registres, on s'assure que la mémoire la plus rapide possible est utilisée, et que tout le calcul est mené sur le même cœur. Mais ce code paraît bien abscons pour faire juste $1 + 3$! Rappelons que, dans l'immense majorité des cas, l'assembleur n'est qu'un intermédiaire dans la conversion d'un programme vers une forme

14. On passe ici sous silence le mécanisme de *combinaison* de caractères en Unicode, nécessaire pour les emoji.
15. Selon les langages, cela se passe typiquement juste après l'écriture du programme (compilation) ou au moment de son exécution (interprétation).
16. Comme l'assembleur est directement lié aux caractéristiques du processeur, il s'agit plutôt d'une famille de langages.

compréhensible par l'ordinateur, et qu'il n'est alors pas destiné à être lu (et encore moins écrit) par un humain.
Notez aussi que, contrairement aux usages de la programmation habituelle, ce petit programme n'utilise aucune variable. À la place, il fait référence aux noms des zones mémoire (ici les registres) où se trouvent les valeurs à manipuler.

```
mov %rax, 3      ; place la valeur 3 (en base 10)
                 ; dans le registre rax
mov %rbx, 1      ; place la valeur 1 (en base 10)
                 ; dans le registre rbx
add %rax, %rbx   ; additionne les valeurs stockées
                 ; dans rax et rbx de sorte que
                 : le résultat soit dans rax
```

4.2 Évolution des langages

Les langages ajoutent une nouvelle interface entre les idées du programmeur et leur exécution par l'ordinateur.
Voici quelques étapes de l'apparition des nouveaux langages.

- Années 50 : langages spécialisés FORTRAN, LISP, COBOL
- 1958 : définition de ALGOL, qui donnera l'impulsion des langages universels
- 1967 : simula-67 premier langage orienté objet
- 1972 : C, langage défini en parallèle avec le système UNIX
- 1972 : PROLOG, programmation logique
- 1973 : ML, programmation fonctionnelle (évolution de lisp)

C'est le langage C qui a le plus inspiré les langages utilisés ensuite : c'est un langage impératif de bas niveau qui se traduit très facilement en langage machine tout en offrant un système de types. Les langages successifs améliorent en terme de puissance d'expression et de facilité d'écriture les langages antérieurs.
Les avantages des langages modernes sont

- la lisibilité du code
- sa concision
- son indépendance par rapport au processeur.

4.3 Propriétés de Python

Nous allons apprendre les concepts importants de la programmation avec le langage Python.

1. C'est un langage Open Source, disponible gratuitement sur la grande majorité des architectures,
2. qui s'appuie sur une importante communauté de développeurs.
3. Il contient de nombreux outils sous forme de modules qui sont intégrés (Batteries Included).
4. Plusieurs milliers de packages supplémentaires sont disponibles dans tous les domaines.
5. C'est un langage moderne, rapide dans le cycle écriture-test (interprété) et simple (indentation significative).
6. L'interpréteur Python est écrit en C, de même que certaines bibliothèques (d'autres sont écrites en Fortran).
7. On peut lui reprocher parfois une lenteur lors de l'exécution de programmes importants, ce n'est pas un langage compilé. Lors du développement de projets industriels on peut être amené à ré-écrire le code (ou une partie du code) dans un autre langage.
8. Cependant c'est un langage bien adapté à l'écriture de projets, il est devenu le standard dans les laboratoires pour écrire simplement des programmes personnalisés.

Chapitre II

Variables

Résumé

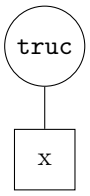
Dans ce chapitres nous allons introduire l'affectation. Cette instruction est très importante car elle permet de dépasser la simple machine à calculer : un ordinateur calcule, certes, mais surtout garde en mémoire le résultat calculé. L'affectation établit la connexion entre les **expressions**, *c'est-à-dire les calculs et les* **variables**. *Ces deux notions sont interconnectées :*

- *les variables mémorisent le résultat d'une expression*
- *les expressions utilisent les valeurs des variables.*

1 Variables

L'essentiel du travail effectué par un programme d'ordinateur consiste à manipuler des données. Ces données peuvent être très diverses, mais dans la mémoire de l'ordinateur elles se ramènent toujours en définitive à une suite finie de bits (symboles que l'on représente par 0 ou 1) qui est stockée dans la mémoire. Pour pouvoir accéder aux données, il suffit de se souvenir à quelle adresse est stockée la valeur de la donnée. Cependant il est plus simple d'associer un nom à une adresse ce qui revient, pour l'utilisateur, à associer une valeur à un nom. L'association d'une valeur à un nom se fait par l'affectation :

la variable de nom `truc` prend la valeur x



Ceci se note, en python, `truc = x`.
On sera vigilant sur le fait que le `=` de Python n'est pas l'égalité classique ;
`x = 4` devrait se lire *x reçoit la valeur 4* et non pas *x égale 4*.

1.1 Noms de variables

Pour l'utilisateur une variable est d'abord un nom : les noms de variables sont des noms que vous choisissez vous-même assez librement.

La majorité des langages ont les mêmes règles pour la création des noms de variables.

- Un nom de variable est une séquence de lettres (a ...z , A ...Z), de chiffres (0 ...9) et du caractère _ (underscore). Elle doit toujours commencer par une lettre.
- La casse est significative (les caractères majuscules et minuscules sont distingués).
- Il existe une liste de mots clés réservés qui ne peuvent pas être employés comme noms de variables. Dans le cas de Python il s'agit de

and	as	assert	break	class	continue	def
del	elif	else	except	False	finally	for
from	global	if	import	in	is	lambda
None	nonlocal	not	or	pass	raise	return
True	try	while	with	yield		

Il y a, de plus, quelques usages qu'il est recommandé de respecter.

- Choisissez de préférence des noms aussi explicites que possible, de manière à exprimer clairement ce que la variable est sensée contenir.
  Par exemple si on a besoin d'un majorant, d'un minorant et d'une moyenne il vaut mieux éviter des les appeler `m1`, `m2` et `m3`, on ne saura pas vraiment à quoi ils correspondent. Il vaudrait mieux utiliser simplement `majorant`, `minorant` et `moyenne`.
  Par contre `majorant_des_termes_de_la_suite` est sans doute un peu excessif.
- Prenez l'habitude d'écrire l'essentiel des noms de variables en caractères minuscules (y compris la première lettre).
- Les majuscules ou le symbole _ permettent de découper le nom :
  `premierTerme` ou `premier_terme`.

1.2 Expressions

La valeur que prend une variable peut être donnée explicitement : `g = 9.81`
Le plus souvent ce sera le résultat d'un calcul, c'est la valeur d'une expression : `somme = 2 + 3`.

Définition :
Une expression est une portion de code que l'interpréteur Python peut évaluer pour obtenir une valeur.

L'affectation se fait en 3 étapes successives.

- L'expression est évaluée, le résultat est stocké à une adresse `ad`.
- Un nouveau nom de variable est défini (même s'il existait déjà avant)
- `ad` est liée au nom de la variable.

Une expression peut utiliser des variables déjà définies : lors de l'affectation la valeur **à l'instant du calcul** de la variable est utilisée, le résultat ne sera pas mis à jour si la variable est associée plus tard à une autre valeur. Par exemple l'instruction `a = 2 + b` :

1. cherche la valeur de `b`, par exemple 3,
2. calcule 2 + b, ce qui donne l'entier 5,
3. réserve de la place en mémoire pour un entier,
4. y stoke l'entier 5,
5. associe le nom de variable `a` à cette adresse.

La temporalité permet d'écrire des instructions de la forme `i = i + 1` : l'ancienne valeur de `i` est lue, on lui ajoute 1 et on affecte cette nouvelle valeur à la variable de nom `i`. L'ancienne valeur est perdue.

2 Opérations de base

2.1 Entiers

Les opérations sur les entier sont, en Python,

- +, -, $*$ l'addition, la soustraction et la multiplication
- $**$ l'exponentiation `n**p` donne n^p, elle peut aussi s'écrire `pow(n, p)`,
- // et % donnent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne, on les obtient aussi par la fonction `divmod`,
- `abs` renvoie la valeur absolue.

Voir quelques exemples.

```
>>> 2+3
5
>>> 3*14
42
>>> 3**5
243
>>> 18//7
2
>>> 18%4
2
>>> divmod(7,4)
(1, 3)
```

2.2 Flottants

Les flottants supportent les mêmes opérations que les entiers avec la division en plus. Si on mélange entiers et flottants le résultat sera un flottant, lors d'une division de deux entiers le résultat est un flottant.
Les résultat de `4/2` et de `4//2` peuvent, dans certains contextes, ne pas être interchangeables !
L'import du module **`math`** ajoute un grand nombre d'opérations mathématiques usuelles.

```
>>> import math
>>> 2 + 3.5
5.5
>>> 7/3
2.333333333
>>> int(4.3)
4
>>> int(-3.2)
-3
>>> float(5)
>>> 2.3**1.4
3.2093639532679714
>>> math.sin(math.pi/4)
0.7071067811865475
>>> math.log(2.7)
0.9932517730102834
```

Il est possible de convertir une variable flottante en un entier avec la fonction `int` qui retire la partie fractionnaire ou la fonction `round` qui calcule l'entier le plus proche.
La fonction `float` convertit un entier en un flottant (en conservant la valeur).
La fonction partie entière (`floor`) est définie dans le module `math` ainsi que la partie entière supérieure (`ceil`). Il y a donc 4 manières différentes de convertir un flottant en réel.

Table II.1 – Conversions entières

x	int(x)	round(x)	floor(x)	ceil(x)
4.0	4	4	4	4
4.26	4	4	4	5
4.83	4	5	4	5
3.5	3	3	3	4
-2.35	-2	-2	-3	-2
-7.97	-7	-8	-8	-7
-2.5	-2	-2	-3	-2

2.3 Booléens

Le résultat d'une comparaison est un `Booléen` : `False` ou `True`, c'est-à-dire vrai ou faux, une erreur classique est d'oublier la majuscule initiale.

- Les tests d'égalité, noté `==`, ou d'inégalité, noté `!=`, donnent un résultat booléen.
- Les comparaisons d'entiers ou de flottants ont pour résultat des valeurs booléennes. Les opérateurs sont notés `<, >, <=, >=`
- On dispose aussi des opérateurs logiques usuels : `and, or, not` qui permettent de combiner les résultats de plusieurs opérations de comparaison.

a	b	a and b	a or b	not b
True	True	True	True	False
True	False	False	True	True
False	True	False	True	
False	False	False	False	

```
>>> (5+7) == 12
True
>>> (5+7) != 13
True
>>> 6 > 8
False
>>> 6 <= 8 and 5 < 3
False
```

N.B. Les flottants ont une précision limitée. Une conséquence est qu'un test de nullité d'un flottant ne donne que rarement le résultat `True` même si, mathématiquement, la variable devrait avoir la valeur nulle.
Nous utiliserons souvent des variables booléennes, par exemple pour suivre la valeur de vérité d'une propriété qui doit être vérifiée pour un grand nombre d'éléments.

2.4 Chaînes de caractères

Dans Python, les caractères usuels sont associées à un entier entre 0 et 255 selon un encodage ASCII sur 8 bits avec les fonctions

- `ord`, qui donne le code d'un caractère,
- `chr`, qui donne le caractère associé à un entier.

Les caractères seront utilisés le plus souvent sous la forme d'une assemblage de caractères, la **chaîne de caractères** de type `str`.

On définit une chaîne en en écrivant les caractères entourés d'apostrophes simples, `nom = 'Jean Moulin'`, ou doubles, `nom = "Raymond Aubrac"`.
Python permet de convertir les nombres en chaînes de caractères à l'aide de la fonction `str`.

```
>>> a = 1/33
>>> b = 257
>>> str(a)
'0.3333333333333333'
>>>str(b)
'257'
```

Si une chaîne représente un réel (ou un entier) directement (sans opération) on peut la convertir avec la fonction nommée selon le type.

```
>>> float("3.14159")
3.14159
>>> int("254")
254
>>> float("254")
254.0
```

2.5 Affichage

`print` permet d'afficher des chaînes de caractères ou les valeurs des expressions à l'écran
Ce n'est pas une copie directe du contenu d'une variable.

```
>>> print("Tom Morel")
Tom Morel
>>> print(2+3)
5
```

On peut utiliser des caractères spéciaux dans une chaînes de caractères, ils seront interprétés par la fonctions `print`.

- `\'` est remplacé par une apostrophe,
- `\"` est remplacé par une apostrophe double,
- `\n` est remplacé par un retour à la ligne,
- `\t` est remplacé par une tabulation ...

Ces caractères spéciaux sont signifiés à l'aide de deux signes mais sont considérés chacun comme un seul caractère.

```
>>> a = 'Sans liberté de blâmer\nIl n\'est d\'éloge flatteur'
>>> print(a)
```

```
Sans liberté de blâmerIl n'est d'éloge flatteur
```

On pouvait ici éviter les `\'` en écrivant
`"Sans liberté de blâmer\n Il n'est d'éloge flatteur"`
Si on envoie plusieurs paramètres à imprimer, séparés par une espace.

```
>>> x = 3
>>> y = 'fois'
```

```
>>> z = 5
>>> print(x, y, z)
3 fois 5
```

2.6 Lecture

Un programme Python peut lire une variable.
L'instruction `arg = input(ch)`

- affiche la chaîne de caractères `ch` ; il est utile quel la chaîne indique que le programme attend une entrée au clavier,
- attend que l'on saisisse une chaîne de caractère au clavier suivie de l'appui de la touche **return**,
- puis affecte cette chaîne à la variable `arg`.

Le résultat est une chaîne de caractères ; on peut le vérifier avec la fonction `type` qui renvoie le type de données correspondant à une variable. Pour convertir le résultat reçu en nombre il faut convertir la chaîne à l'aide des fonctions `int` ou `float`.

Programme II.1 – Calcul du prix TTC

```
#Programme de calcul du prix TTC
prix_ht = input ("Quel est le prix hors taxes ? \n")
print(type(prix_ht))
prix_ht=float(prix_ht)
print(type(prix_ht))
prix_ttc=prix_ht+prix_ht*20/100
print("Le prix TTC est {:.2f} euros".format(prix_ttc)
-----------------------------------
Quel est le prix hors taxes ?
145.5
<class 'str'>
<class 'float'>
Le prix TTC est 174.60 euros
```

Nous n'utiliserons que rarement la fonction `input` : en effet le but sera de construire des programmes qui passeront directement les paramètres entre les différentes parties.

Chapitre III

Fonctions

Résumé

Un principe de base dans l'écriture d'un programme est de ne pas répéter les instructions pour faire plusieurs fois le même type de calcul : cela peut être résumé par l'acronyme DRY (Don't Repeat Yourself). Le moyen de factoriser les codes utilisés plusieurs fois est l'usage de fonctions. L'écriture de fonctions sera l'activité principale du cours.

1 Pourquoi des fonctions ?

Une fonction consiste à rassembler une partie de code en spécifiant bien les paramètres utilisés et les résultats calculés. On écrit une fonction pour différentes raisons.

- Comme dit dans l'introduction, on peut rassembler plusieurs suites d'instructions semblables sous une même fonction,
- On peut séparer plusieurs parties du programme sous forme de fonctions, cela améliore la lisibilité. Notons qu'on peut répéter ce procédé : on obtient une structure d'arbre de parties de plus en plus précises.
- On peut déléguer l'écriture d'instruction à d'autres : Python emploie de nombreuses bibliothèques de fonctions, écrites avec soin et qui permettent l'usage de fonctions standard (il nous serait difficile d'écrire une fonction sinus).

2 Des fonctions prédéfinies

Par défaut, le langage propose quelques fonctions prédéfinies, en voici la liste. On y reconnaît

Table III.1 – Fonctions de base de Python

abs	all	any	ascii	bin	bool	breakpoint
bytearray	bytes	callable	chr	@classmethod	compile	complex
delattr	dict	dir	divmod	enumerate	eval	exec
filter	float	format	frozenset	getattr	globals	hasattr
hash	help	hex	id	input	int	isinstance
issubclass	iter	len	list	locals	map	max
memoryview	min	next	object	oct	open	ord
pow	print	property	range	repr	reversed	round
set	setattr	slice	sorted	@staticmethod	str	sum
super	tuple	type	vars	zip	___import___	

- des fonctions mathématiques : `abs, divmod, max, min, pow`,
- les nombreuses fonctions de conversion : `bin, bool, chr, complex, float, hex, int, list, oct, ord, round, set, str, tuple`,
  - `bin, hex, oct` donnent les écritures des entiers en base 2, 16 et 8 sous forme de chaînes de caractères précédées respectivement de `'0b '0x` et `'0o`,
  - `int` transforme en entier en enlevant la partie décimale tandis que `round` donne la valeur entière la plus proche,
- des fonctions d'entrée-sortie [1] : `input, open, print`.

Nous utiliserons lors de l'étude des listes les fonctions `len` et `range`.
Les autres fonctions ne seront pas utilisées.

On voit qu'il y a peu de fonctions. Cependant il existe un grand nombre de fonctions dans des modules que l'on peut charger ; en plus des modules standards de Python nous utiliserons les bibliothèques scientifiques `numpy`, `scipy` et `matplotlib`.
Par exemple, le module **`math`** rajoute la plupart des fonctions mathématiques usuelles.

```
import math
hypothenuse = 7
angle  = 0.8 # radians
oppose = hypothenuse*math.sin(angle)
adjacent = hypothenuse*math.cos(angle)
```

Un autre exemple est le module ***random*** qui permet d'effectuer des tirages aléatoires.

```
# Imprime un entier tiré au hasard dans l'intervalle [1; 6],
 random
a=random.randint(1, 6)
print(a)
```

On peut simplifier l'écriture
- en important directement les fonctions utilisées, `from math import import sin, cos`
- en important toutes les fonctions du module, `from math import *`.

On ne préfixe plus par le nom du module, `cos(0.6)`.

1. La fonction `open` sera étudiée plus tard.

3 Définir ses propres fonctions

On considère une fonction mathématique simple, $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3x+2}{1+x^2}$.
En Python on va retrouver les mêmes éléments.

1. La déclaration du nom de la fonction, ici f
2. le nom choisi pour la variable (ou les noms), ici x
3. les calculs qui permettent de trouver le résultat souhaité.

```
def f(x):
    """Entrée : une variable flottante
       Sortie : la valeur de la fonction en ce point"""
    numerateur = x**2 + 3*x + 2
    denominateur = 1 + x**2
    y = numerateur/denominateur
    return y
```

on peut alors utiliser la fonction directement

```
>>> f(2)
8.0
>>> f(5)
5.5
>>> a=2
>>> b=f(a)
>>> b
8.0
```

ou par des appels dans l'éditeur, il conviendra d'utiliser la fonction `print` afin d'afficher le résultat.

```
print(f(5))
a=2
b=f  (a)
print(b)
-----
5.5
8
```

Une fonction est définie par :

1. une première ligne de déclaration composée
   (a) du mot-clé **`def`**,
   (b) du nom choisi pour la fonction
   (c) de la liste des variables utilisées, entre parenthèses,
   les parenthèses doivent être écrites, même s'il n'y a pas de variable,
   (d) du symbole **`:`**
2. des instructions permettant le calcul attendu, dans un bloc indenté (de 4 espaces)
3. d'une ligne facultative, indentée elle aussi, commençant par **`return`** pour donner la valeur (ou les valeurs) que la fonction doit renvoyer.

3.1 Documentation d'une fonction pour l'usager

Afin de savoir quel est le rôle d'une fonction, dans quel ordre il faut rentrer les paramètres ou quelles sont les valeurs renvoyées, il est important de documenter sa fonction. Pour cela on peut écrire une documentation de la fonction à l'intérieur de celle-ci : le docstring (programme III.1).

Programme III.1 – Exemple de docstring

```
def hypotenuse(a, b):
    """Entrees : 2 nombres, les cotes d'un triangle rectangle
```

```
        Sortie : l'hypotenuse du triangle """
    c=sqrt(a**2 + b**2)
    return c
```

La documentation de la fonction s'écrit dans le corps de la fonction, juste après la première ligne de déclaration. La documentation commence par """ et se termine par """. Cette documentation doit donc indiquer :

- la liste des paramètres attendus dans l'ordre,
- la ou les valeurs renvoyées s'il y en a.

Il est possible de faire appel à cette documentation dans une console en tapant `help(nom_fonction)`.

```
>>> help(hypotenuse)
Help on function hypotenuse in module __main__:

def hypotenuse(a, b):
    Entrees : 2 nombres, les cotes d'un triangle rectangle
    Sortie : l'hypotenuse du triangle
>>>
```

La documentation n'est pas obligatoire, Python saura utiliser la fonction. Mais elle a pour rôle de permettre à un utilisateur de mettre en œuvre une fonction dont il ne connaît pas la structure interne, à ce titre elle est indispensable.

3.2 Documentation d'une fonction pour les programmeurs

Lorsque l'on écrit une fonction il faut prévoir qu'elle sera relue, modifiée, corrigée.
À ce moment le lecteur (ce peut être l'auteur original) devra comprendre les idées de l'auteur, c'est souvent très difficile.
Il est donc recommandé de "commenter" la fonction en indiquant les étapes intermédiaires, les significations des variables, les astuces utilisées.
Pour cela on peut écrire des phrases humainement lisibles après le caractère `#`, tout ce qui suit sera ignoré par python mais sera lisible par celui ou celle qui lira le code.
Voici, par exemple, un code produit dans un TIPE, il n'y a malheureusement pas de docstring.

Programme III.2 – Exemple de code documenté

```
def premiersZeros(nb,n):
    h = 0.1          # Pas pour la recherche
    epsilon = 1e-10  # Précision pour les zéros,
                     # on peut la diminuer
    zeros = []       # Liste pour recevoir les zéros
    a = h            # On commence à h, pas en 0,
                     # car jn(n,0) = 0
    def f(x):          # On définit la fonction que l'on
        return jn(n,x) # utilise, ici Bessel à l'ordre n
    for i in range(nb):  # On veut nb zéros
        while f(a)*f(a+h) > 0:      # On balaye à la recherche
            a  = a + h              # d'un changement de signe
        z = dicho(f,a,a+h,epsilon)  # On cherche la racine
        zeros.append(z)             # On l'ajoute à la liste
        a = a + h               # On part un cran plus loin
    return zeros
```

Plus la fonction est longue plus il sera nécessaire de la commenter, il arrivera fréquemment que les commentaires prennent plus de place que le code.

4 Usage des fonctions

La traduction d'un programme s'effectuant ligne par ligne, la définition d'une fonction doit s'effectuer en amont de son usage. Ainsi pour notre fonction hypoténuse, son utilisation s'écrit dans l'éditeur et ne peut se faire qu'après l'écriture de la fonction.

```
def hypotenuse(a, b):
    """Entrees : 2 nombres, les cotes d un triangle rectangle
       Sortie : l hypotenuse du triangle """
    c=sqrt(a**2 + b**2)
    return c

valeur_hyp=hypothenuse(3,5)
print(valeur_hyp)
```

On obtient `5.830951894845301`.

4.1 Paramètre

Les paramètres d'une fonction doivent être rentrés dans l'ordre

```
def devoirs(lycee,annee,jour) :
    print("Au lycee", lycee, ", les devoirs sur table en",
       annee ,"ont lieu le",jour)

devoirs("Faidherbe","1ere annee","samedi")
devoirs("samedi","1ere annee","Faidherbe")
```

donnera

```
Au lycee Faidherbe, les devoirs sur table en 1ere annee ont
   lieu le samedi
Au lycee samedi, les devoirs sur table en 1ere annee ont lieu
   le Faidherbe
```

Il est cependant possible d'utiliser le nom des paramètres et ainsi de s'affranchir de l'ordre de la définition.

```
devoirs(jour="samedi",annee="1ere annee",lycee="Faidherbe") :
```

Lorsqu'une fonction ne demande pas de paramètre son appel doit comporter les parenthèses.

```
def bonjour():
    print("Bienvenue a Faidherbe")

>>> bonjour()
Bienvenue a Faidherbe
>>> bonjour
<function bonjour at 0x7f4ae14e06a8>
```

4.2 Paramètres optionnels

Lorsque l'on définit une fonction on peut utiliser des paramètres qui ont valeur par défaut mais que l'on voudrait bien pouvoir faire varier si besoin.
Python permet cette expressivité.

- On introduit les paramètres optionnels **après** ceux qui ne le sont pas dans la liste des paramètres de la fonction.
- Lorsqu'on définit la fonction, on leur affecte une valeur par défaut.

- Il n'est pas obligatoire de leur donner une valeur lors de l'appel de la fonction.
- Si on veut leur donner une valeur, on introduit une nouvelle affectation dans l'appel de la fonction.

```
def logarithme(x, base = math.e):
    """Entrees : un nombre positif, x
                 un nombre positif optionnel, base,
                 la base du logarithme calculé
       Sortie : le logarithme en base "base" de x"""
       y = math.log(x)/math.log(base)
       return y

>>> logarithme(10)
2.302585092994046
>>> logarithme(10, base = 2)
3.3219280948873626
```

4.3 Valeurs renvoyées

Une fonction fait des calculs et on veut pouvoir les utiliser.

- Les variables définies dans la fonction vont être détruites et donc ne peuvent pas servir à transmettre des résultats.
- Les valeurs imprimées lors de la fonction sont consultables par un humain mais sont inutilisables par l'ordinateur.

Pour recevoir les valeurs utiles calculées par une fonction, on doit utiliser l'instruction **`return`** : les valeurs ainsi retournées remplaceront, lors de l'usage de la fonction, l'appel de la fonction.
Par exemple `hypothenuse(3.0, 4.0)` sera remplacé par `5.0`.
Il faudra alors affecter une variable avec ce résultat ou l'utiliser dans une expression pour pouvoir l'utiliser ensuite.

- Une fonction qui ne possède pas d'instruction `return` ne renvoie pas rien ; par défaut la valeur renvoyée est `None`, c'est-à-dire "rien".
- Quand une fonction renvoie plusieurs valeurs, on recevra les différents résultats dans plusieurs variables (en nombre correspondant) séparées par des virgules.

Programme III.3 – Exemple de retour multiple

```
def sphere(rayon):
    """ Entree : un nombre positif, le rayon de la sphere
        Sortie : la surface et le volume de la sphere """
    surf=4*math.pi*rayon**2
    vol=(4/3)*math.pi*rayon**3
    return surf, vol


>>> surface, volume = sphere(2)
>>> surface
50.26548245743669
>>> volume
33.510321638291124
>>>
```

5 Exercice : le jeu des erreurs

On veut calculer la hauteur parcourue par un objet en chute libre.
Chacun des programmes suivants est réalisé dans l'éditeur puis compilé complètement ; il engendre une erreur ou des résultats surprenants.
Prévoir les problèmes et les corriger.

1
```
def chuteLibre(t):
    z=0.5*g*t**2
    return z
print(chuteLibre(2))
```

2
```
def chuteLibre(t):
    g=10
    z=0.5*g*t**2
    print(z)
resultat=chuteLibre(2)
print(resultat)
```

3
```
print(chuteLibre(2))

def chuteLibre(t):
    g=10
    z=0.5*g*t**2
    return z
```

4
```
def chuteLibre(t):
    g=10
    z=0.5*g*t**2
    return z
print(chuteLibre(2))
print(z)
```

5
```
def chuteLibre(t):
    g=10
    t=1
    z=0.5*g*t**2
    return z
temps=2
print(chuteLibre(temps))
```

6
```
def chuteLibre(t):
    g=10
    z=0.5*g*t**2
    return z
print(chuteLibre(2))
```

Pour ne pas envahir les textes le docstring n'est pas écrit. Il devrait être

```
    """ Entrée : un réel t
        Sortie : la distance parcourue pour une durée t
                 pour un objet en chute libre
                 de position et vitesse initiales nulles"""
```

Indications
Les messages d'erreur peuvent être instructifs.

1. `NameError: global name 'g' is not defined`
2. `20.0` La distance calculée est affichée
   `None` Mais elle n'est pas renvoyée, on ne peut rien en faire.
3. `NameError: name 'chuteLibre' is not defined`
   On utilise la fonction avant sa définition.
4. `20.0`, `NameError: name 'z' is not defined`
   `z` n'existe plus en dehors de la fonction.
5. `5.0` : le temps est modifié dans la fonction, on a calculé `chuteLibre(1)`.
6. `IndentationError: unindent does not match any outer indentation level`.
   Une erreur parfois difficile à détecter

Chapitre IV

Boucles simples

1 Pourquoi les boucles ?

Un ordinateur peut exécuter des tâches à notre place mais si il faut écrire une instruction pour le moindre calcul, le temps d'écriture peut devenir rédhibitoire.
Nous allons ici introduire les instructions qui permettent de faire répéter un grand nombre de fois des opérations similaires avec peu de moyens.
Nous utilisons très souvent de tels raccourcis.

1. Faire 10 rangées de point droit (tricot).
2. Copier 100 fois "Je dois apporter mon cahier en cours".
3. Faire 10 longueurs de bassin à la brasse.
4. Écrire la table de multiplication par 7.
5. Ranger les habits dans l'armoire.

Toutes ces instructions contiennent des gestes élémentaires à répéter : soit en répétant les mêmes choses (1, 2, 3), soit en faisant une action pour chaque élément d'un ensemble, les entiers de 1 à 10 dans le cas 4, les différents habits pour le cas 5.

2 Répétitions

Nous commençons par un cas particulier de répétition inconditionnelle.

2.1 Un exemple

La méthode de Héron permet de calculer une valeur approchée d'un réel positif a : on part d'une valeur pas trop éloignée, x, et on calcule $x' = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. C'est en fait un cas particulier de la méthode de Newton que l'on étudiera plus tard. Une propriété remarquable est que x' est plus proche de $\sqrt{a}$ que x en général. Si on répète l'opération en choisissant x' à la place de x on obtient un meilleure approximation et on peut alors recommencer un certain nombre de fois.
Voici un programme qui itère 3 fois le procédé à partir de a.

```
def racine3(a):
    """Entrée : un réel positif a
       Sortie : une valeur approchée de la racine de a"""
    x = a
    x = (x + a/x)/2
    x = (x + a/x)/2
    x = (x + a/x)/2
    return x
```

On peut alors tester la fonction

```
>>> racine3(2)
1.4142156862745097

>>> racine3(9)
3.023529411764706
```

Le résultat est satisfaisant pour des réels entre 1 et 10. Comme la qualité du résultat dépend de la valeur initiale le résultat est moins spectaculaire pour d'autres valeurs.

```
>>> racine3(100)
15.025530119986813
```

Cependant on a ici une instruction que l'on répète 3 fois et il suffit de la répéter encore pour obtenir une meilleure précision. On aimerait éviter d'avoir à effectuer cette réécriture et pouvoir demander à la machine, de façon concise, de répéter un ensemble d'instructions.

```
def racine(a, n):
    """Entrée : un réel positif a et un entier n
       Sortie : une valeur approchée de la racine de a
                obtenue en itérant n fois
                la méthode de Heron """
    x = a
    # repéter n fois
        x = (x + a/x)/2
    return x
```

2.2 Traduction python

Les instructions Python pour répéter n fois un ensemble d'instructions sont

```
    for i in range(n):
        instruction 1 à répéter
        instruction 2 à répéter
        ...
        instruction p à répéter
    suite des instructions après répétition
```

Les instructions à répéter forment un bloc qui est repéré par l'indentation supplémentaire.
Notons que ce bloc est précédé du symbole de ponctuation : comme lors de la définition d'une fonction. C'est en fait toujours le cas dans la syntaxe python.
Le programme ci-dessus devient donc

```
def racine(a, n):
    """Entrée : un réel positif a et un entier n
       Sortie : une valeur approchée de la racine de a
                obtenue en itérant n fois
                la méthode de Heron """
    x = a
    for i in range(n):
        x = (x + a/x)/2
    return x
```

3 Boucles inconditionnelles

Dans les répétitions ci-dessus, l'instruction `for i in range(n):` introduit une variable, `i`, dont on ne s'est pas servi.

3.1 Définition

Définition : Boucle inconditionnelle
Les instructions

```
for i in range(n):
    instruction 1 à répéter
    instruction 2 à répéter
    ...
    instruction p à répéter
suite des instructions après répétition
```

1. *créent une suite d'entiers 0, 1, ..., $n-1$,*
2. *pour chacun de ces entiers,*
   la variable (i ici, mais tout nom de variable est possible) prend cette valeur
   et les instructions du bloc sont exécutées.

La variable i prend bien n valeurs ; cependant ces n valeurs ne sont pas les entiers de 1 à n mais les entiers de 0 à $n-1$. Ces entiers correspondent aux indices des suites de n éléments que l'on étudiera dans un prochain chapitre, les **listes**.
Ce décalage d'indice par rapport aux habitudes mathématiques demande un apprentissage mais la cohérence avec les autres notations python le rend vite naturel.

À chaque passage dans la boucle la variable i prend une valeur différente : on peut donc l'utiliser pour faire des calculs.
Par exemple $n!$ est le produit des entiers de 1 à n, on peut donc calculer la factorielle en multipliant par $i+1$ pour chaque valeur de i entre 0 et $n-1$. On a besoin d'un support pour contenir les produits, on va donc initialiser une variable, la valeur de départ doit être neutre pour le produit, c'est 1.

```
def factorielle(n):
    """Entrée : un entier positif n
       Sortie : n! """
    produit = 1
    for i in range(n):
        k = i + 1
        produit  = produit*k
    return produit
```

On peut remarquer que, lors du premier passage ($i=0$), l'instruction `produit = produit*k` aurait donné une erreur si on n'avait pas initialisé `produit` ; dans la partie droite la variable `produit` n'existe pas encore.

3.2 Généralisation

La création des indices par `range` crée un compteur simple.
Quand on a besoin d'une suite d'entiers non consécutifs on peut les calculer à partir du compteur. On l'a fait dans la factorielle, un autre exemple suit :

```
def sommeCarres(n):
    """Entrée : un entier positif n
       Sortie : la somme des carrés des entiers de 1 à n (
           compris) """
    somme = 0
```

```
    for i in range(n):
        k = (i +1)**2 # i+1 varie de 1 à n
        somme  = somme + k
    return somme
```

La fonction `range` permet de créer une suite finie d'entiers plus générale si on lui donne 3 paramètres : `range(debut,fin,pas)` crée une suite finie d'entiers

- qui commence par `debut`
- qui progresse de `pas` à chaque étape
- qui s'arrête dès qu'elle dépasse (ou atteint) `fin`

On peut omettre le pas : il prendra alors la valeur 1.
Si le pas est positif (resp. négatif) et si on a `debut >= fin` (resp. `debut <= fin`), la boucle n'est pas parcourue : en particulier c'est le cas d'une boucle de la forme `for i in range(0)` ou `for i in range(a, a)`.
Quelques exemples

- `range(5,17,3)` produit $(5, 8, 11, 14)$ (la borne supérieure est exclue)
- `range(5,9)` est équivalent à `range(5,9,1)` donc produit $(5, 6, 7, 8)$
- `range(5)` est équivalent à `range(0,5)` donc à `range(0,5,1)` et produit $(0, 1, 2, 3, 4)$.
- `range(6,0,-1)` produit $(6, 5, 4, 3, 2, 1)$,
- `range(4,-1,-1)` produit $(4, 3, 2, 1, 0)$.

On peut écrire alors la factorielle sous la forme

```
def factorielle(n):
    """Entrée : un entier positif n
       Sortie : n! """
    produit = 1
    for k in range(1, n+1):
        produit  = produit*k
    return produit
```

4 Complexité : 1

4.1 Introduction

Le but de la programmation sera souvent de répondre à un problème. Nous verrons qu'il existe dans de nombreux cas plusieurs algorithmes (que l'on traduit en programmes) qui permettent de résoudre un même problème.
Dans ce cas il sera utile d'essayer de comparer ces différents algorithmes en nous posant la question de l'efficacité.
Cette efficacité doit être celle de l'algorithme utilisé.

1. Ce n'est donc pas la durée de réflexion nécessaire à l'achèvement de l'algorithme.
2. Ce n'est pas non plus la facilité d'écriture du programme dans un environnement donné : *"Il a fallu 250 heures pour écrire le programme"*. On mesurerait en fait l'habileté des programmeurs, la richesse des bibliothèques ...

Nous choisirons souvent de nous intéresser au temps de calcul nécessaire [1].
On peut penser à mesurer le temps effectivement pris par le programme pour exécuter la tâche. Si on veut comparer deux algorithmes il faudra le faire sur les mêmes machines, avec le même langage, le mêmes conditions etc
Cependant cette mesure est à la fois trop précise, on n'a pas réellement besoin de la durée **exacte**, et trop imprécise car on veut savoir ce qui se passe pour des données d'entrée de plus en plus grandes (et sans perdre notre temps à faire tourner réellement le programme). On veut pouvoir prévoir l'ordre de grandeur du temps.
Pour cela on va compter les instructions "élémentaires" qu'effectue le programme.

1. Nous verrons dans un prochain chapitre qu'on peut s'intéresser aussi à la quantité de mémoire utilisée à l'exécution du programme

La notion d'instruction élémentaire est difficile à définir, nous allons dans un premier temps compter les affectations `variable = calcul`. Lorsque le calcul fait appel lui-même à des fonctions il faudra compter les affectations qu'il engendre.

Dans la suite de l'année on pourra choisir de compter d'autres instructions élémentaires :
- les opérations arithmétiques,
- les comparaisons,
- les lectures et écritures dans un fichiers, ...

Dans le cas de boucles les lignes de programme de la boucle sont effectuées plusieurs fois, il faudra compter ce nombre de passages.
L'intérêt du calcul de complexité est d'anticiper le temps de calcul pour des données d'entrées de plus en plus grandes. Pour cela on fixe un mesure de la taille de cette entrée et on évalue la complexité de l'algorithme en fonction de cette taille. On obtiendra une fonction $C(n)$ où n représente la taille de l'entrée.

Définition : Complexités
La complexité est
1. **linéaire** *si elle est de la forme* $C(n) = an + b$ *ou si elle est majorée par une telle fonction.*
2. **quadratique** *si elle est de la forme* $C(n) = an^2 + bn + c$.
3. **polynomiale** *si elle est majorée par un polynôme en la taille de l'entrée*

Un complexité linéaire donnera des programmes dont le temps de calcul est approximativement proportionnel à la taille de l'entrée.
Par contre si on double la taille d'entrée d'un programme de complexité quadratique le temps de calcul va être multiplié par 4 : le temps de calcul va devenir un problème plus rapidement que dans le cas d'un programme de complexité linéaire.
De manière générale on préférera des algorithme de complexité polynomiale de degré le plus petit possible.
Exemple

```
1  def factorielle(n):
2      """Entrée : un entier positif n
3         Sortie : n! """
4      produit = 1
5      for i in range(n):
6          k = i + 1
7          produit  = produit*k
8      return produit
```

On commence par une affectation (ligne 4), la boucle comporte 2 affectations et elle est parcourue n fois. La complexité est dont $C(n) = 2n + 1$, elle est linéaire.

4.2 Une étude de cas

On s'intéresse à la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \end{cases}$

```
def u(n):
    """Entrée : un entier n
       Sortie : le n-ième terme de la suite u"""
    x = 2
    for i in range(n):
        x = (x + 2/x)/2
    return x
```

La complexité de cette fonction, en nombre d'affectations, est $C_u(n) = 1 + n$.

On veut ensuite calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

L'écriture naturelle d'une fonction python est

```
def S(n):
    """Entrée : un entier n
       Sortie : le n-ième terme de la suite S"""
    somme = 0
    for k in range(n+1):
        somme = somme + u(k)
    return somme
```

On notera que la borne du `range` est $n+1$ pour calculer les u_k jusqu'à u_n.
À chaque passage dans la boucle on effectue une instruction et l'appel de la fonction `u(k)` demande k instructions. La complexité est donc $C_S(n) = \sum_{k=0}^{n}(1+k) = \sum_{p=1}^{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
La complexité est quadratique.
Le calcul de `S(1000)` demande 0,06 secondes, celui de `S(10000)` demande 6 secondes.

On peut faire plus rapide en remarquant que les appels successifs à la fonction `u` calculent à chaque fois les mêmes termes avant de calculer le dernier. On va calculer les termes successifs dans le corps de la fonction principale.

```
def S_mieux(n):
    """Entrée : un entier n
       Sortie : le n-ième terme de la suite S"""
    u = 2
    somme = 0
    for k in range(n+1):
        somme = somme + u
        u = (u + 2/u)/2
    return somme
```

La complexité cette fonction, en nombre d'affectations, est $C(n) = 2 + 2(n+1)$. C'est maintenant une complexité linéaire. Le calcul de `S_mieux(10000)` demande 1 ms.

Chapitre V

Les structures conditionnelles

Résumé

Pour l'instant nous n'avons vu les programmes que sous la forme de suites d'instructions exécutées l'une après l'autre.
On est parfois amené à n'appliquer une partie de programme que si une condition est vérifiée ou à exécuter des traitements différents selon l'appartenance de valeurs à certains ensembles.

1 Les structures conditionnelles

1.1 Instruction if

L'instruction `if` permet de vérifier des conditions avant d'exécuter un bloc d'instructions. C'est la forme la plus simple des instructions conditionnelles.

Définition : condition simple
La structure conditionnelle est composée par

- *l'instruction* `if` *suivi d'une expression booléenne puis de* `:`*,*
- *un bloc d'instructions indenté, ces instructions ne seront exécutées que si l'expression booléenne est évaluée avec la valeur* `True` *(vrai).*

Nous préciserons dans la suite la notion d'expression booléenne.
L'indentation s'ajoute à l'indentation déjà existante au moment de l'écriture de l'instruction `if`.
Exemple : valeur absolue (elle existe déjà sous le nom `abs`).

```
def valeur_absolue(x):
    if x < 0:
        x = -x
    return x
```

1.2 Instruction else

Parfois le test (expression booléenne) sert à discriminer : on effectue des instructions si la condition est vérifiée et d'autres instructions si elle ne l'est pas.

Définition : condition complète
La structure conditionnelle complète est composée par

- *l'instruction* `if` *suivi d'une expression booléenne puis de* `:`,
- *un bloc d'instructions indenté qui sera effectué si la l'expression booléenne vaut* `True`,
- `else:` *au même niveau d'indentation que* `if`,
- *un bloc d'instructions indenté qui sera effectué si la l'expression booléenne vaut* `False`.

Un des deux blocs (et un seul) sera toujours exécuté. On pourra donc définir une nouvelle variable en donnant sa valeur selon les cas.

```
def valeur_absolue(x):
    if x < 0:
        val_abs = -x
    else:
        val_abs = x
    return val_abs
```

Les deux branches de l'alternative peuvent contenir une instruction `return`.

```
def valeur_absolue(x):
    if x < 0:
        return -x
    else:
        return x
```

En fait, comme une instruction `return` interrompt la fonction on peut écrire le programme précédent sous la forme suivante, sans doute moins lisible que les autres.

```
def valeur_absolue(x):
    if x < 0:
        return -x
    return x
```

1.3 Instruction elif

Il arrivera réguièrement que l'on ait à distinguer plusieurs cas : il faut alors imbriquer plusieurs instructions conditionnelles

```
def signe(x):
    """Entrée : un nombre x
       Sortie : 1, 0 ou -1 selon que x est
                positif, nul ou négatif"""
    if x == 0:
        return 0
    else:
        if x > 0:
            return 1
        else:
            return -1
```

mais les choses peuvent devenir compliquées quand le nombre de cas augmente.
Le programme suivant détermine la mention du bac.

```
def afficheMention(note):
    """Entrée : la note du bac
       Sortie : la mention obtenue"""
    if note < 10:
        return 'Non admis'
    else:
        if note < 12:
            return 'Admis sans mention'
        else:
            if note < 14:
                return 'Mention assez bien'
            else:
                if note < 16:
                    return 'Mention bien'
                else
                    return 'Mention tres bien'
```

Python propose une structure raccourcie[1] qui évite d'imbriquer les conditions.

Définition : séparations de cas

On peut traiter des cas qui s'excluent par

- *l'instruction* `if` *suivi d'une expression booléenne puis de* `:`,
- *un bloc d'instructions indenté qui sera effectué si la l'expression booléenne vaut* `True`
- *un certain nombre d'instructions* `elif` *suivies d'une expression booléenne puis du symbole* `:`, *toutes au même niveau d'indentation que* `if`
- *pour chacune un bloc d'instructions indenté qui sera effectué si la l'expression booléenne vaut* `True` *et les précédentes valent* `False`
- `else:` *au même niveau d'indentation que* `if`
- *un bloc d'instructions indenté qui sera effectué si toutes les expressions booléennes valent* `False`

On peut donc écrire l'algorithme des mentions de manière plus lisible

```
def mention(note):
    """Entrée : la note du bac
       Sortie : la mention obtenue"""
    if note < 10:
        return 'Non admis'
    elif note < 12:
        return 'Admis sans mention'
    elif note < 14:
        return 'Mention assez bien'
    elif note < 16:
        return 'Mention bien'
    else:
        return 'Mention très bien'
```

1.4 Complexité : 2

Les instructions conditionnelles introduisent une incertitude lors du calcul du nombre d'instructions ; en effet ce nombre peut être différent selon le résultat du test. On est donc amené à calculer un **majorant** de la complexité, plutôt qu'une expression de celle-ci. On essaiera, dans la mesure du possible, de donner un majorant qui peut être atteint pour certaines valeurs des paramètres.

1. On parle de **sucre syntaxique**.

2 Les expressions booléennes

Une structure conditionnelle nécessite la définition d'une **condition** dont le résultat est booléen (True ou False) : une expression booléenne. Celles-ci s'obtiennent en deux temps : on crée des résultats booléens à l'aide de comparaisons et on les combine avec des opérateurs booléens.

2.1 Les opérateurs de comparaison

Un premier test possible est l'identité : une variable (ou un résultat) est-il égal à une autre ?
Le test d'égalité ne s'écrit pas `=` qui est l'opérateur d'affectation mais `==`.
On l'a utilisé pour comparer à 0 dans la fonction `signe`.
La différence est signifiée[2] par `!=`.

Les variables qui sont comparables, principalement les nombres, peuvent être testées selon leur ordre.

	inférieur	supérieur
Strictement	`<`	`>`
ou égal	`<=`	`<=`

2.2 Les opérateurs booléens

Les résultats des comparaisons peuvent combinés de la même manière que les nombres peuvent être combinés par les opérations usuelles d'addition, soustraction, division, ...
Les opération de base utilisées dans python sont

- `and` (et) : `test1 and test2` vaut `True` si et seulement si `test1` **et** `test2` sont évalués à `True`,
- `or` (ou) : `test1 or test2` vaut `True` si et seulement si au moins un des deux test est évalué à `True`, le ou n'est pas exclusif, si `test1` et `test2` valent `True` alors `test1 or test2` vaut `True`
- `not` (négation) : inverse le résultat.

a	b	a and b	a or b	not b
True	True	True	True	False
True	False	False	True	True
False	True	False	True	
False	False	False	False	

2.3 Évaluation paresseuse

Les définitions données ci-dessus sont correctes mathématiquement mais ce n'est pas ce qu'utilisent les langages de programmation. Lors de l'évaluation de `a or b` on sait que le résultat est vrai dès que la proposition `a` est vérifiée. Python n'évalue calculera pas le résultat de `b` dans ce cas. La même remarque s'applique lors de l'évaluation de `a and b` : si `a` est faux, python renvoie `False` sans chercher à calculer `b`.
Cela rend le calcul non commutatif :

```
>>> True or (1/0 == 1)
True

>>> (1/0 == 1) or True
ZeroDivisionError: division by zero
```

Ce comportement est en fait très utile, nous l'utiliserons avec les boucles `while`.

2. On peut penser le symbole comme la déconstruction du signe mathématique $\neq$: une barre et le signe égal.

Chapitre VI

Listes : 1

Résumé

Jusqu'à présent nous avons utilisé des données simples : entiers, réels, booléens.
Il est naturel de vouloir manipuler des données multiples, des assemblages de types simples.
Nous allons définir et apprendre à utiliser un assemblage simple de valeurs sous forme d'une suite finie.

1 Introduction

Les ensembles de données peuvent avoir différentes propriétés :

- la longueur peut être fixée à l'avance (ensemble des notes trimestrielles) ou varier au fur et à mesure des modifications (résultats expérimentaux)
- le type des composant peut être homogène (liste de références) ou non (fiche de répertoire)
- on peut vouloir accéder aux composants par leur place (suite d'entiers), par un nom (intitulés d'un répertoire) ou accéder aux éléments un par un (file d'attente)
- on peut souhaiter pouvoir modifier les éléments (moyenne des devoirs des étudiants) ou rendre les modifications impossibles (caractéristiques d'un atome).

Chaque langage définit des objets composés en faisant des choix.
Traditionnellement deux types sont utilisés.

Les tableaux qui sont des suites finies de composants de type fixé, indexés par leur position, de longueur fixée et dont les éléments sont modifiables.

Les listes qui sont des suites finies de composants de type fixé, dans lesquels on n'accède qu'au premier (ou dernier) élément, que l'on peut ajouter ou enlever.

Les contraintes de ces types proviennent des limitations des premiers ordinateurs, en particulier les temps d'accès à la mémoire. La ordinateurs modernes sont nettement plus rapides et un langage récent comme Python peut définir un type beaucoup plus souple. Malencontreusement il est encore nommé **liste** alors qu'il est plus général que les listes usuelles. Nous allons, dans ce chapitre étudier l'aspect tableaux des listes Python.

2 Définitions

2.1 Petites listes

Si le nombre d'éléments n'est pas trop important on peut créer la liste en écrivant tous ses éléments : par exemple `carres = [1, 4, 9, 16, 25, 36, 49]`.
On remarque que la liste est encadrée par des crochets et les éléments sont séparés par une virgule.
On peut alors manipuler ces listes.

- Le nombre d'éléments de la liste est sa **longueur** : on la calcule avec la fonction `len`.

```
>>> len(carres)
7
```

- Pour une liste de longueur n, les n éléments sont accessibles par leur position mais celle-ci commence par 0. Les n éléments sont donc donnés par `liste[i]` avec i variant de 0 à $n-1$.

```
>>> carres[3]
16
>>> carres[0]
1
>>> carres[7]
IndexError: list index out of range
```

- On peut modifier un élément en considérant `liste[i]` comme une variable

```
>>> carres[4] = 7
>>> carres
[1, 4, 9, 16, 7, 36, 49]
```

- On peut associer (on dit **concaténer**) deux listes.

```
>>> cubes = [1, 8, 27, 64]
>>> carres + cubes
[1, 4, 9, 16, 7, 36, 49, 1, 8, 27, 64]
```

- On peut répéter une liste

```
>>> cubes*3 = [1, 8, 27, 64]
[1, 8, 27, 64, 1, 8, 27, 64, 1, 8, 27, 64]
```

2.2 Tuples

Si on encadre la suite des élément par des parenthèses, on définit un **tuple**.
En fait les parenthèses sont facultatives.
On accède aux éléments d'un tuple, et on les combine comme les listes. Cependant on ne peut pas les modifier

```
>>> a = 2, 3, 7
>>> a
(2, 3, 7)
>>> len(a)
3
>>> a[2]
7
>>> a[1] = 0
TypeError: 'tuple' object does not support item assignment
```

Renvoyer plusieurs élément dans un `return` renvoie en fait un tuple.

2.3 Listes générales

Énumérer les éléments d'une liste n'est, en général, pas raisonnables : les listes que nous emploierons auront des milliers d'éléments (et bien plus, souvent). Pour créer une liste de taille quelconque :

- on crée une liste "neutre" en répétant une liste de taille 1,
- on la remplit pas-à-pas à l'aide d'une boucle.

```
def listeCarres(n):
    """Entrée : un entier n
       Sortie : la liste des carrés des entiers de 1 à n"""
    carres = [0]*n
    for i in range(n):
        carres[i] = (i+1)**2
    return carres
```

2.4 Particularités de Python

Python permet des constructions supplémentaires qui ne sont pas usuelles dans les autres langages.

Indices négatifs

On peut accéder aux éléments depuis la fin : le dernier élément a l'indice -1, le précédent l'indice -2 et on continue jusqu'au premier qui a l'indice $-n$ où n est la longueur de la liste.
Par exemple pour la liste [4, 9, 2, 3, 7]

élément	4	9	2	3	7
indice	0	1	2	3	4
indice négatif	-5	-4	-3	-2	-1

- En particulier on accède alors au dernier élément sans calculer la longueur : `list[-1]`.
- Pour une liste de longueur n, les indices i et $i - n$ définissent le même élément ($0 \leqslant i < n$).

Conversion de `range`

La production d'un générateur `range` peut être convertie en liste :

```
>>> list(range(4, 14, 3))
[4, 7, 10, 13]
```

Définition par compréhension

Dans un exemple ci-dessus, on a créé les valeurs d'une liste en appliquant une fonction, ici $i \mapsto (i+1)^2$, aux indices produits par une instruction `for`. La construction peut être synthétisée en python de manière simple.

```
def listeCarres(n):
    """Entrée : un entier n
       Sortie : la liste des carrés des entiers de 1 à n"""
    liste = [(i+1)**2 for i in range(n)]
    return liste
```

3 Traitement de listes

3.1 Listes comme paramètres

Une liste peut être un paramètre d'une fonction qui utilise les éléments de la liste : cela se fait à l'aide d'une boucle qui lit un-à-un les termes de la liste.

Lecture d'une liste

Beaucoup de fonctions que nous écrirons auront une structure similaire à l'exemple suivant.

```
1  def somme(liste):
2      """Entrée : une liste
3         Sortie : la somme des termes"""
4      n = len(liste)
5      som = 0
6      for i in range(n):
7          som = som + liste[i]
8      return som
```

- Ligne 4 : quand on utilise la longueur de la liste il est utile de l'affecter à une variable car cela améliore la lisibilité.
- Ligne 5 : les termes d'une liste servent souvent à construire un résultat par des calculs successifs, ne pas oublier d'initialiser la variable.

Dans l'écriture ci-dessus on n'a pas utilisé l'indice de la boucle. Python permet de parcourir la liste sans passer par les indices.

```
def somme(liste):
    """Entrée : une liste
       Sortie : la somme des termes"""
    som = 0
    for x in liste:
        som = som + x
    return som
```

Python permet aussi d'accéder aussi à l'indice et à la valeur dans une liste :

```
   for i, x in enumerate(liste):
```

Cette possibilité est peu employée.

Lecture partielle

Un autre exemple est la recherche d'un terme dans une liste.
La valeur à renvoyer est un booléen, on définit une variable booléenne, par exemple `present`, que l'on initialise à `False` : on n'a pas encore trouvé.

```
def appartient(x, liste):
    """Entrée : un élément et une liste
       Sortie : True ou False selon que x
                est ou n'est pas un élément de la liste"""
    n = len(liste)
    present = False
    for y in liste:
        if liste[i] == x:
            dedans = True
    return present
```

On remarque qu'on continue à chercher quand on a trouvé.
On verra dans un chapitre suivant une instruction d'itération qui permet de de ne pas continuer.
Cependant on peut simplement utiliser un `return` dans la boucle qui interrompt celle-ci.

```
1  def appartient(x, liste):
2      """Entrée : un élément et une liste
3         Sortie : True ou False selon que x
4                  est ou n'est pas un élément de la liste"""
5      n = len(liste)
6          for y in liste:
7          if y == x:
8              return True
9      return False
```

On remarque qu'il n'est plus utile de définir la variable calculée, on renvoie le résultat directement.
On renvoie `True` dès qu'on a trouvé l'élément cherché (ligne 8).
À la sortie de la boucle (ligne 8), on n'a pas trouvé l'élément cherché donc on renvoie `False`.

Instruction `break`

L'interruption de la boucle par `return` est radicale : on ne peut plus rien faire après être sorti de la boucle. Pour interrompre la boucle simplement et revenir à la suite du programme on peut utiliser l'instruction `break`.

```
1  def carres_premiers_positifs(liste):
2      """Entrée : une liste
3         Sortie : le carré de la somme
4                  des premiers termes positifs"""
5      n = len(liste)
6      som = 0
7      for x in liste:
8          if x >= 0:
9              som = som + x
10         else:
11             break
12     return som**2
```

Modification d'une liste

Un liste est **modifiable** : si on change une de ses valeurs, elle reste la même variable.
Si on écrit une fonction qui modifie une liste, on n'écrit pas d'instruction `return` : le résultat est porté par la liste donnée en paramètre.
On utilisera à plusieurs reprises en seconde année la fonction d'échange de termes dans une liste :

```
def echange(liste,i,j):
    """Entree : une liste et deux indices i, j
       Requis : 0 <= i,j < len(liste)
       Sortie : les termes i et j sont échangés"""
    temp = liste[i]
    liste[i] = liste[j]
    liste[j] = temp
```

3.2 Extraction

On peut souhaiter extraire une sous-liste d'une liste Python. L'extraction d'une tranche se fait en indiquant le premier indice choisi et le premier indice non pris séparés par un " :".

```
>>> liste = [3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 2]
>>> liste1 = liste[2:7]
>>> liste1
[4, 1, 5, 9, 2]
```

On peut noter que `liste[a:b]` contient $b - a$ éléments.

Valeurs par défaut

Si on n'indique pas le premier terme il prendra la valeur 0 par défaut.
Si on n'indique pas le second terme il prendra la valeur n par défaut où n est la longueur de la liste. En particulier `liste[:]` reproduit la liste entière.

```
>>> liste = [3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 2]
>>> liste2 = liste[:5] # correspond à liste[0:5]
>>> l2
[3, 1, 4, 1, 5]
>>> liste1 = liste[-4:] # ou liste[-4:10] ou liste[6:10]
[2, 6, 5, 2]
```

On remarque que `liste[:k]` et `liste[k:]` définissent un découpage de la liste.

Pas

On peut même sélectionner les termes en les prenant séparés par un pas constant.
On ajoute le pas en troisième paramètre après un " :".

```
>>> l = [3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 2]
>>> liste1 = liste[1:8:2]
>>> liste1
[1, 1, 9, 6]
```

Dans le cas d'un pas négatif les valeurs par défaut sont
n (la longueur) pour le premier terme et -1 pour le deuxième.
En particulier on peut calculer la liste avec l'ordre des termes inversé par `[::-1]`.

```
>>> l = [3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 2]
>>> liste[ : : -1]
[2, 5, 6, 2, 9, 5, 1, 4, 1, 3]
```

La syntaxe d'extraction permet aussi de définir les indices d'une liste à modifier :

```
>>> liste1 = [1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]
>>> liste2 = [2,2,2]
>>> liste1[2:6] = liste2
>>> liste1
[1,1,2,2,2,1,1,1,1,1]
```

```
>>> liste1 = [9,8,7,6,5,4,3,2,1]
>>> liste1[6:] = liste1[:8:2]
>>> liste1
[1,1,2,2,2,1,9,7,5,3]
```

3.3 Copie

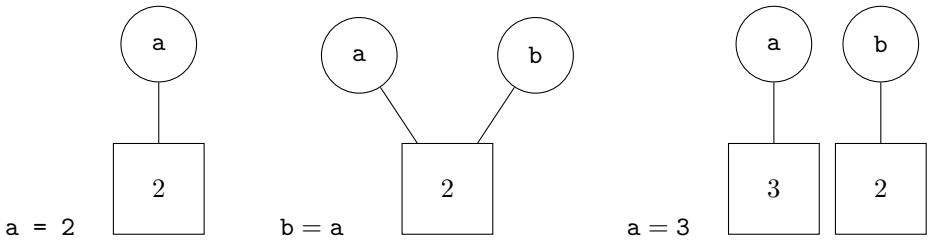
Voici un comportement qui peut surprendre.

```
>>> liste1 = [2, 5, 4]
>>> liste2 = liste1
>>> liste2
[2, 5, 4]
>>> liste1[1] = 3
>>> liste1
[2, 3, 4]
>>> liste2
[2, 3, 4]
```

Une modification de `liste1` influe sur `liste2` ! Nous avons vu le fonctionnement de l'affectation `variable = expression`.

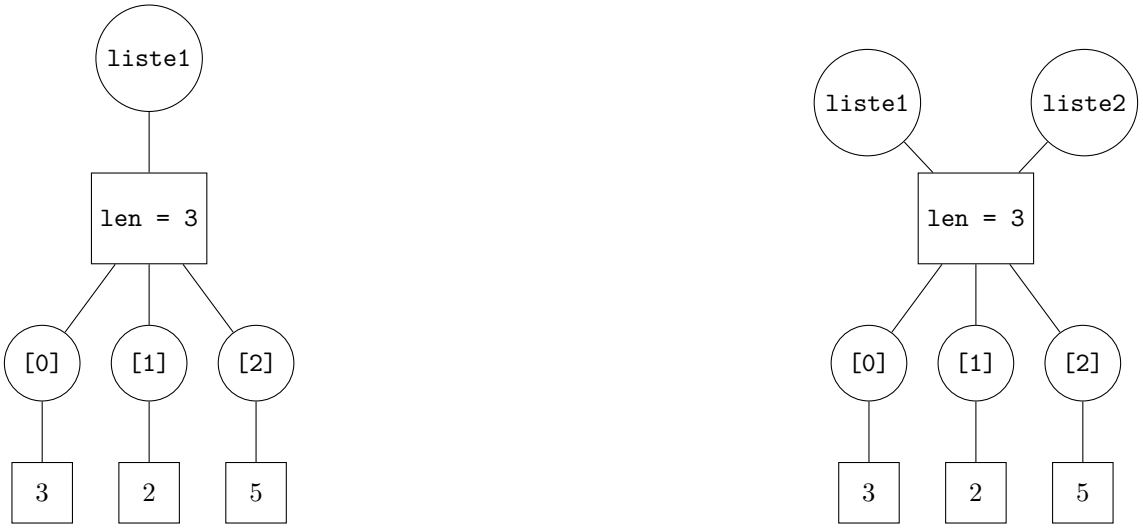
1. L'expression est évaluée, le résultat est stocké à une adresse `ad`.
2. Un nouveau nom de variable est défini (même s'il existait déjà avant, dans ce cas l'ancien est oublié)
3. `ad` est lié au nom de la variable.

Dans le cas où l'expression est en fait une variable simple, `b = a`, alors le fonctionnement ci-dessus change. `a` et `b` sont maintenant associés à la même adresse. Ce sont deux synonymes d'une même variable. Dans le cas de variables simples cela n'a pas d'incidence car la modification d'une variable en crée une nouvelle.

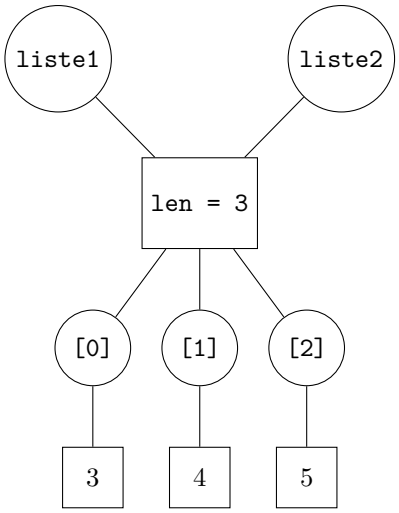


Voici ce que produisent les instructions

```
liste1 = [3, 2, 5]
liste2 = liste1
```



Dans le cas d'une liste, une affectation `liste[i] = xxx`
ne crée pas une nouvelle liste,
elle modifie le contenu d'un emplacement de la liste.
Par exemple l'instruction `liste1[1] = 4` donne la situation ci-contre, les deux listes ont toujours des valeurs égales.



Si on veut dupliquer une liste le moyen recommandé est d'utiliser une fonction à importer.

```
from copy import deepcopy
```

La fonction `deepcopy` est alors disponible et `liste2 = deepcopy(liste1)` crée une nouvelle liste `liste2` qui a les mêmes valeurs que `liste1` mais qui est indépendante.

3.4 Complexité : 3

La création d'une liste aura une complexité proportionnelle à la taille de la liste : on doit mettre chaque élément à sa place, même avec une instruction `[0]*n`.
De plus on voit ici une autre possibilité de limitation : c'est l'encombrement en mémoire. Dans un environnement limité en mémoire il faudra en tenir compte. On sera donc parfois utile considérer la complexité spatiale : c'est le nombre de "cases" de listes crées lors d'un programme en plus de la mémoire occupée par les paramètres de la fonction.

4 Exercice

Exercice VI.1 — Extraction
On définit `liste = [2, 8, 4, 6, 2, 7, 3, 5]`
Dans chacun des cas suivants prévoir le résultat de la commande.

1. `liste[1]`
2. `liste[-3]`
3. `liste[8]`
4. `liste[-8]`
5. `liste[3:6]`
6. `liste[3:7:2]`
7. `liste[6:2]`
8. `liste[6:2:-1]`
9. `liste[-2:-5]`
10. `liste[-2:-5:-1]`
11. `liste[-5:6]`
12. `liste[4:8] = liste[0:4]`
    `liste`

5 Solutions

Solution de l'exercice VI.1 -

1. `liste[1] -> 8`
2. `liste[-3] -> 7`
3. `liste[8] ->` **IndexError** : list index out of range
4. `liste[-8] = 2`
5. `liste[3:6] -> [6, 2, 7]`
6. `liste[3:7:2] -> [6, 7]`
7. `liste[6:2] -> []`
8. `liste[6:2:-1] -> [3, 7, 2, 6]`
9. `liste[-2:-5] -> []`
10. `liste[-2:-5:-1] -> [3, 7, 2]`
11. `liste[-5:6] -> [6, 2, 7]`
12. `liste[4:8] = liste[0:4]`
    `liste -> [2, 8, 4, 6, 2, 8, 4, 6]`

Chapitre VII

Boucles conditionnelles

Résumé *Dans ce chapitre, on introduit la possibilité de calculs répétés sans connaissance préalable du nombre d'itérations qui seront nécessaires.*

1 Définition

1.1 Un exemple

On veut chercher le nombre de chiffres dans l'écriture en base 10 d'un entier naturel non nul. On peut écrire le programme suivant

```
def nbChiffres(nombre):
    """Entree : un entier positif
       Sortie : le nombre de chiffres de ce nombre"""
    if nombre == 0:
        return 0
    elif nombre < 10:
        return 1
    elif nombre < 100:
        return 2
    elif nombre < 1000:
        return 3
    elif nombre < 10000:
        return 4
    else:
        print("Nombre trop grand")
```

`nbChiffres(438)` renverra 3.
On a comparé le nombre n avec des puissances de 10, la première fois que n dépasse 10^p, on a $10^{p-1} \leqslant n < 10^p$ donc n a p chiffres.
Le problème est que la fonction ne donne pas de résultat pour les grands entier : quelle soit la longueur du programme que l'on écrit, il existera des entiers dont le résultat n'est pas calculable.
On peut améliorer le programme précédent en utilisant utilisant une variable dont la valeur sera la puissance de 10 (et une autre correspondant à l'exposant). On demande alors de faire la comparaison entre le nombre et la puissance de 10 de manière répétée :

- si le nombre est encore trop grand, on multiplie la puissance par 10 et on ajoute 1 au nombre de chiffres puis on recommence,
- si on a dépassé alors le nombre de chiffres était le bon.

On fait donc un calcul **tant que** le nombre est inférieur à la puissance de 10.
La traduction python est directe, on utilise `while` :

```
def nbChiffres(nombre):
    """Entree : un entier positif
       Sortie : le nombre de chiffres de ce nombre"""
    puissance10 = 1 # On initialise, pour 0
    chiffres = 0    # 0, seul nombre < 1, a 0 chiffre
    while nombre >= puisance10:
        puissance10 = 10*puissance10
        chiffres = chiffres + 1
    return chiffres
```

1.2 Syntaxe

Définition : Boucle conditionnelle
La suite d'instructions

```
    while exp_bool:
        instruction 1 à répéter
        instruction 2 à répéter
        ...
        instruction p à répéter
    suite des instructions après répétition
```

1. *teste l'expression booléenne* `exp_bool`
2. *si celle-ci est évaluée à* `True`*, les instructions 1 à p sont exécutées et le programme revient au test*
3. *si elle est évaluée à* `False`*, le programme passe directement à la suite des instructions.*

Une des difficultés lors de l'écriture des programmes qui utilisent les boucles `while` est la gestion de l'expression booléenne : on ne souhaite pas, en général, laisser l'ordinateur répéter une suite d'instructions sans fin [1].
Il faudra s'assurer qu'au moins une des variables est modifiée à chaque passage pour que, après un nombre fini d'itérations, la condition puisse devenir fausse.
Dans l'exemple ci-dessus la variable `puissance10` prend les valeurs $1, 10, 100, \ldots, 10^p, \ldots$successivement. Comme la limite de la suite (10^p) est l'infini, on est assuré qu'après un nombre fini d'étapes cette variable prendra une valeur supérieure au nombre donné en entrée donc le test donnera le résultat `False` et la boucle cessera..

2 Usages

2.1 `for` et `while`

Il y a donc deux techniques pour faire répéter une suite d'instructions.
En fait une seule suffirait. En effet on peut remplacer les boucles `for` par des boucles `while`.
Le code suivant remplace une boucle `for i in range(a, b, c)`.

```
i = a
while i < b: # pour c négatif, écrire while i > b:
    instructions(i)
    i = i + c
instructions suivantes
```

1. Un contre-exemple : l'interface graphique d'un ordinateur est en fait une boucle infinie qui attend les commandes et les exécute, on ne souhaite pas que le système cesse.

On voit qu'on doit initialiser la variable `i` et la modifier dans le corps de la boucle.

Ainsi la boucle `while` est plus générale que la boucle `for`.
Cependant quand on connaît à l'avance le nombre d'itérations que doit effectuer une boucle il est recommandé d'utiliser une boucle `for` : le principal avantage est qu'une boucle `for` permet d'éviter les possibles erreurs de programmation qui font qu'une boucle `while` peut tourner indéfiniment.

2.2 Nombre de chiffres

Un entier n tel que $10^{p-1} \leqslant n < 10^p$ s'écrit avec p chiffres.
Pour calculer p il faut calculer le premier entier p tel que $10^p > n$.
Il est préférable de ne pas calculer les puissances à chaque calcul, on maintient une variable pour l'exposant p mais aussi une variable qui contient les valeurs 10^p qu'il suffit de multiplier par 10 à chaque étape.

```
def taille(n):
    p = 0
    puissance10 = 1
    while puissance10 <= n:
        puissance10 = puissance10 * 10
        p = p + 1
    return p
```

2.3 Limite de suites adjacentes

Si deux suites u et v sont adjacentes (avec $u_n \leqslant v_n$) on sait que la limite ℓ vérifie $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$. Pour calculer la limite avec une précision $\varepsilon > 0$ il suffit de calculer u_n et v_n jusqu'à obtenir $v_n - u_n \leqslant \varepsilon$.
Par exemple la constante d'Euler, γ est la limite des suites adjacentes définies Par

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1) \text{ et } v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$$

.

```
from math import log
def gamma(epsilon):
    n = 1               # on commence par u1 et v1
    sigma = 1           # somme des 1/k
    u = sigma - log(2) # valeur de u1
    v = sigma           # valeur de v1
    while v - u  > epsilon:
        n = n +1
        sigma = sigma + 1/n
        u = sigma - log(n+1)
        v = sigma - log(n)
    return (u + v)/2
```

2.4 Recherche dans une liste

On revient sur le problème de la recherche d'un élément dans une liste

1. On rappelle l'algorithme basique

```
def appartient1(x, liste):
    n = len(liste)
    dedans = False
    for i in range(n):
        if liste[i] == x:
            dedans = True
    return dedans
```

N.B. Pourquoi ferait-on une erreur en attribuant la valeur `False` à la variable `dedans` en cas de test négatif ?

2. On peut regretter que la recherche se poursuive même si on a trouvé l'élément : une boucle `while` permet d'interrompre la recherche dès que la réponse est positive.

```
def appartient2(x, liste):
    n = len(liste)
    dedans = False
    i = 0
    while (not dedans) and (i < n):
        if liste[i] == x:
            dedans = True
        i = i + 1
    return dedans
```

3. On peut même utiliser la boucle `while` de manière astucieuse en évitant l'usage de la variable `dedans`. En effet la valeur de `i` lorsque la boucle s'arrête est un indicateur : si i est strictement inférieur à n, c'est qu'on a trouvé `x` dans `liste[i]`, si i vaut n c'est qu'on n'a pas trouvé.

```
def appartient3(x, liste):
    n = len(liste)
    i = 0
    while (i < n) and liste[i] != n:
        i = i + 1
    return i < n
```

On notera que l'on doit placer la condition `i < n` **avant** l'autre condition car, pour $i = n$, la deuxième condition n'a pas de sens. L'évaluation paresseuse du `and` fait qu'alors `liste[i]` n'est pas évalué si on a $i = n$.

4. On a vu qu'il est cependant possible d'interrompre une boucle `for` après un test avec une instruction `return`.

```
def appartient4(x, liste):
    n = len(liste)
    for i in range(n):
        if liste[i] == x:
            return True
    return False
```

Il sera souvent possible d'utiliser une boucle `for` pour un nombre d'itérations non connu à l'avance si on connaît un majorant du nombre d'itérations.

3 Recherche dans une liste triée

3.1 Idée

Si un élément x n'appartient pas à une liste et qu'on le recherche dans cette liste, les algorithmes précédents vont comparer x avec tous les éléments de la liste. Il semble difficile de faire autrement : pour être sur qu'un élément n'est pas dans une liste il faut être sur qu'il soit différent de tous les éléments.
Cependant si la liste est triée on peut utiliser cette information supplémentaire : si x est strictement supérieur à `liste[i]` alors il ne peut pas être égal à `liste[j]` pour tout $j \leqslant i$ (quand la liste est triée par ordre croissant).
Le principe est alors similaire au jeu classique :
Agnès (**A**) demande à Bernard (**B**) de penser à un nombre entre 1 et 100 et lui annonce qu'elle va le deviner en posant au plus 7 questions auxquelles Bernard répondra en disant *trouvé*, *trop petit* ou *trop grand*. Par exemple (**B** a pensé à 88)

- **A** : "*50*" — **B** : "*trop petit*"
- **A** : "*75*" — **B** : "*trop petit*"
- **A** : "*87*" — **B** : "*trop petit*"
- **A** : "*94*" — **B** : "*trop grand*"
- **A** : "*91*" — **B** : "*trop grand*"
- **A** : "*89*" — **B** : "*trop grand*"
- **A** : "*88*" — **B** : "*trouvé*"

Au départ **A** sait que le nombre est entre 1 et 100. La première réponse diminue cet intervalle à $[51; 100]$, la seconde à $[76; 100]$ et ainsi de suite jusqu'à la dernière question qui n'en est pas vraiment une car **A** sait que le nombre est entre 88 et 88.
On remarque que **A** teste un nombre qui est la moyenne approchée[2] des bornes connues, cela permet de diminuer l'intervalle au mieux dans tous les cas.

L'algorithme de recherche va suivre ces idées.

1. On initialise deux bornes `min` et `max` avec les bornes de la liste.
2. On définit le milieu de `min` et `max`, `m`, et on compare le terme d'indice `m` de la liste à l'élément recherché.
3. S'il y a égalité on renvoie `True`, on a trouvé.
4. Si l'élément recherché est strictement plus grand, on remplace `min` par `m+1` ; en effet x ne peut pas être égale à `liste[i]` pour $i \leqslant m$.
5. Si l'élément recherché est plus strictement petit, on remplace `max` par `m-1`.
6. On recommence en 2 si on peut encore chercher, sinon on renvoie `False`.

3.2 Écriture

L'algorithme ci-dessus s'exécute tant qu'il reste des éléments parmi lesquels chercher, comme on cherche entre `min` et `max`, la condition est `min <= max`.

```
def recherche(x, liste):
    min = 0
    max = len(liste) - 1
    while min <= max:
        m = (min + max)//2 # on doit avoir un indice entier
        if liste[m] == x:
            return True
        elif liste[m] < x:
            min = m + 1
        else:
            max = m -1
    return False
```

2. Car on veut que le nombre testé reste un entier.

Exercice VII.1 — Recherche de l'indice
Écrire une fonction `recherche_indice(x, liste)` *qui renvoie un indice i tel que* `liste[i]` *vaut x si x est dans la liste et qui renvoie -1 sinon.*

Exercice VII.2 — Autre écriture
On peut remarquer que l'on fait 2 comparaisons à chaque itération de la boucle.
Écrire une fonction `recherche_un(x, liste)` *qui n'effectue qu'une comparaison dans chaque itération. Cette comparaison ne permettra pas de détecter les cas d'égalité, il devront être testés seulement à la fin. La boucle* `while` *devra donc cesser lorsqu'on arrive à un seul élément où chercher.*

Exercice VII.3 — Premier indice
Écrire une fonction `premier_indice(x, liste)` *qui renvoie le plus petit indice i tel que* `liste[i]` *vaut x si x est dans la liste et qui renvoie -1 sinon.*

3.3 Étude théorique

L'algorithme ci-dessus, la **recherche par dichotomie**, n'est pas simple. Nous verrons en seconde année des algorithmes qui suivent une méthode semblable, appelée "*diviser pour régner*".
Les exercices qui suivent sont plus théoriques que ce qui est demandé en T.P. Ils sont destinés à approfondir la compréhension afin de pouvoir éviter les nombreuses erreurs possibles lors de l'écriture de cet algorithme.

Exercice VII.4 — On sort de la boucle `while`
On note min *et* max *les valeurs des variables* `min` *et* `max` *au départ des instructions d'une boucle ; on a donc* $\min \leqslant \max$.

1. *Montrer que la valeur de* `m`*, notée m, vérifie* $\min \leqslant m \leqslant \max$.
2. *En déduire que si x n'est pas égal à* `liste[m]` *et si* $\min'$ *et* $\max'$ *sont les valeurs des variables* `min` *et* `max` *à la fin des instructions de la boucle on a* $\max' - \min' \leqslant \max - \min - 1$.
3. *Conclure que la condition de la boucle* `while` *finit par être fausse.*

Exercice VII.5 — On obtient le bon résultat

1. *Prouver que si* `x` *n'est pas un élément de la liste alors la fonction renvoie* `False`.
2. *Prouver que s'il existe un indice k tel que* `liste[k] = x` *alors on a* $\min \leqslant k \leqslant \max$ *à chaque moment dans le corps de la fonction.*
3. *En déduire que si* `x` *est un élément de la liste alors la fonction renvoie* `True`.

Exercice VII.6 — Une premier décompte
On suppose que la liste est de longueur $n = 2^p - 1$. Prouver que si x n'est pas un élément de la liste alors la recherche binaire effectue $2p$ comparaisons.

Exercice VII.7 — Nombre de comparaisons
Prouver que si `liste` *est de longueur n avec $n < 2^r$*
alors la fonction `recherche` *effectue au plus $2r$ comparaisons.*

Exercice VII.8 — Recherche moyenne
On suppose que la liste est de longueur $n = 2^p - 1$. On s'intéresse au nombre de comparaisons effectuées pour la recherche d'éléments appartement à la liste par la fonction `recherche`.
Prouver qu'il existe 2^k éléments pour lesquels il y a $2k + 1$ comparaisons ($0 \leqslant k < p$).
En déduire le nombre moyen de comparaisons effectuées pour la recherche des éléments de la liste.

Exercice VII.9 — Analyse de `recherche_un`
En s'inspirant des exercices précédents prouver que la fonction `recherche_un` *de l'exercice VII.2*

1. *donne un résultat,*
2. *donne le résultat attendu*
3. *donne la réponse après $p + 1$ ou $p + 2$ comparaisons*
   si la taille de la liste vérifie $2^p \leqslant n < 2^{p+1}$.

4 Solutions

Solution de l'exercice VII.1 -

```
def recherche(x, liste):
    min = 0
    max = len(liste) - 1
    while min <= max:
        m = (min + max)//2
        if liste[m] == x:
            return m
        elif liste[m] < x:
            min = m + 1
        else:
            max = m -1
    return -1
```

Solution de l'exercice VII.2 -

```
def recherche_un(x, liste):
    min = 0
    max = len(liste) - 1
    while min < max:
        m = (min + max)//2
        if liste[m]  < x:
            min = m + 1
        else:
            max = m
    return liste[min] == x
```

Solution de l'exercice VII.3 -

```
def premier_indice(x, liste):
    min = 0
    max = len(liste) - 1
    while min < max:
        m = (min + max)//2
        if liste[m] == x:
            max = m
        elif liste[m] < x:
            min = m + 1
        else:
            max = m -1
    if liste[min] = x:
        return m
    else:
        return -1
```

Solution de l'exercice VII.4 -

1. On a $2\min \leqslant \min + \max \leqslant 2\max$ d'où $\min \leqslant \left\lfloor \frac{\min+\max}{2} \right\rfloor = m \leqslant \max$.
2. Si on a `liste[m] < x`, on a $\min' = m+1$ et $\max' = \max$ donc $\max' - \min' = \max - (m+1) \leqslant \max - \min - 1$.
   De même, si on a `liste[m] > x`, on obtient $\max' - \min' = (m-1) - \min \leqslant \max - \min - 1$.

3. Comme la quantité $\max - \min$ diminue d'au moins 1 à chaque itérations et que la boucle stoppe lorsque cette quantité devient négative on conclut que la boucle ne peut pas être parcourue plus de $(n-1)-0+1$ fois : la fonction donne un résultat.

Solution de l'exercice VII.5 -

1. Si `x` n'est pas un élément de la liste alors la boucle `while` n'est pas interrompue par une instruction `return`. la démonstration ci-dessus montre qu'on finit par sortir de la boucle `while` donc la fonction va alors renvoyer `False`.
2. On note n la longueur de la liste.
   On a $0 \leqslant k < n$ donc $\min = 0 \leqslant k \leqslant n-1 = \max$ lors de l'initialisation.
   Si on change min en $m+1$, c'est qu'on avait `liste[m] < x = liste[k]` donc, comme la liste est croissante, $m < k$. On en déduit $\min' = m+1 \leqslant k \leqslant \max = \max'$.
   De même, lorsqu'on change max en $m-1$ on conserve la propriété.
3. Le programme ne peut pas renvoyer -1 car cela n'advient que si on exécute la boucle `while` jusqu'à ce qu'on ait min > max qui est impossible car on a $\min \leqslant k \leqslant max$. Le résultat est donc obtenu par une instruction `return True`.

Solution de l'exercice VII.6 -
Si on cherche parmi $1 = 2^1 - 1$ indices sans trouver on fait 2 comparaisons.
Si on cherche parmi $2^k - 1$ indices sans trouver on fait 2 comparaisons puis on cherche ensuite parmi $2^{k-1} - 1$ indices.
Par récurrence on fait donc $2p$ comparaisons.

Solution de l'exercice VII.7 - Soit $\mathcal{P}_k$ la propriété : si on recherche un élément parmi p avec $p < 2^k$ alors l'algorithme effectue au plus $2k$ comparaisons.
$\mathcal{P}_1$ est vraie car on fait 1 ou 2 comparaisons quand on recherche un élément avec min = max.
Si $\mathcal{P}_k$ est vraie avec $k \geqslant 1$, on considère une recherche parmi $p < 2^{k+1}$ éléments.
On fait alors 1 comparaison si on trouve l'élément ou on effectue 2 comparaisons et on est ramené à rechercher l'élément entre min et $m-1$ ou entre $m+1$ et max.
Le nombre d'éléments qui restent est, en utilisant $\frac{a-1}{2} \leqslant \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{a}{2}$,
$m - 1 - \min + 1 = \left\lfloor \frac{\min+\max}{2} \right\rfloor - \min \leqslant \frac{\max-\min}{2} = \frac{p-1}{2} < 2^k$
ou $\max - (m+1) + 1 = \max - \left\lfloor \frac{\min+\max}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{1+\max-\min}{2} = \frac{p}{2} < 2^k$.
Il reste donc au plus $2k$ comparaisons donc le nombre total de comparaisons est majoré par $2k+2$.
On a donc prouvé la récurrence.

Solution de l'exercice VII.8 - On prouve le résultat par récurrence.
Pour $p = 1$, la recherche du seul élément d'une liste demande 1 comparaison.
On suppose le résultat vrai pour les listes de longueur $2^p - 1$.
Si x est un élément d'une liste de longueur $2^{p+1}-1$ alors, s'il est au milieu on fait 1 seule comparaison pour le trouver.
Pour les autres éléments on fait 2 comparaisons puis on les cherche à droite ou à gauche du milieu.
Comme il y a éléments $2^p - 1$ de chaque coté, on fait $2 + 2k + 1$ comparaisons pour 2^k éléments à droite et pour 2^k éléments à gauche donc $2(k+1)+1$ comparaisons pour 2^{k+1} éléments d'où la récurrence.

Dans le cas d'une liste de longueur $2^p - 1$ on fait donc, pour la recherche de tous les éléments de la liste, C_p comparaisons avec

$$\begin{aligned}
C_p &= \sum_{k=0}^{p-1}(2k+1)2^k = \sum_{i=1}^{p}(2i-1)2^{i-1} = \sum_{i=1}^{p}(2i-1)(2^i - 2^{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{p}(2i-1)2^i - \sum_{i=1}^{p}(2i-1)2^{i-1} = \sum_{i=1}^{p}(2i-1)2^i - \sum_{i=0}^{p-1}(2i+1)2^i \\
&= (2p-1)2^p + \sum_{i=1}^{p-1}\big((2i-1)-(2i+1)\big)2^i - (2.0+1)2^0 = (2p-1)2^p - 2\sum_{i=1}^{p-1}2^i - 1 \\
&= (2p-1)2^p - 2(2^p-2) - 1 = (2p-3)2^p + 3
\end{aligned}$$

Le nombre moyen de comparaisons est donc $\dfrac{(2p-3)2^p+3}{2^p-1} \sim 2p$.

Solution de l'exercice VII.9 - On note min et max les valeurs des variables `min` et `max` au départ des instructions d'une boucle et min′ et max′ leurs valeurs à la sortie.

1. L'inégalité $\max - \min > 0$ donne $\min \leqslant \max - 1$ d'où
   $2\min \leqslant \min + \max \leqslant 2\max - 1$ puis $\min \leqslant \left\lfloor \frac{\min+\max}{2} \right\rfloor = m \leqslant \max - 1$.
   Si on a `liste[m] < x`, on a $\min' = m + 1$ et $\max' = \max$ donc
   $\max' - \min' = \max - (m+1) \leqslant \max - \min - 1$.
   Sinon on obtient $\max' - \min' = m - \min \leqslant \max - \min - 1$.
   La quantité $\max - \min$ diminue d'au moins 1 à chaque itération or la boucle stoppe lorsque cette quantité devient négative ou nulle ; on conclut que la boucle ne peut pas être parcourue plus de $(n-1) - 0$ fois : la boucle `while` n'est parcourue qu'un nombre fini de fois.
   De plus l'inégalité $\min \leqslant m \leqslant \max - 1$ permet de montrer qu'on a
   $\min \leqslant \min' \leqslant \max' \leqslant \max$ donc $0 \leqslant \min \leqslant n-1$ à chaque étape.
   Le test `liste[min] == x` est possible : la fonction renvoie un résultat.
2. Si `x` n'est pas un élément de la liste alors la fonction renvoie -1 car on ne peut pas avoir `liste[min] = x`
   Si x est un élément de la liste on note k le plus petit entier tel que `liste[k] = x`.
   On montre alors qu'on a $\min \leqslant k \leqslant \max$ à chaque moment.
   C'est clair au départ.
   Si `liste[m] < x` alors $m < k$ donc $\min' = m + 1 \leqslant k$
   Si `liste[m] >= x` alors soit `liste[m] > x` donc $\max' = m > k$, soit `liste[m] = x` donc $\max' = m \geqslant k$ car k est le plus petit entier vérifiant l'égalité.
   Quand on arrive à $\min = \max$ on a donc $k = \min$ et la valeur renvoyé vérifie bien `liste[min] = x`.
3. On considère le nombre d'éléments parmi lesquels on cherche x : $d = \max - \min + 1$.
   Si d est pair, $d = 2d'$, on a $\max = 2d' - 1 + \min$ donc $m = d' + \min - 1$. On recherche alors entre min et m ou entre $m+1$ et max ; dans les deux cas on cherche parmi d' éléments.
   Si d est impair, $d = 2d' + 1$, on a $\max = 2d' + \min$ donc $m = d' + \min$. On recherche alors entre min et m, $d' + 1$ éléments, ou entre $m+1$ et max, d' éléments.
   Si on a $2^r \leqslant d \leqslant 2^{r+1}$ on a alors $2^{r-1} \leqslant d' \leqslant 2^r$ si $d = 2d'$ et, pour $d = 2d'+1$, $2^r \leqslant 2d'+1 \leqslant 2^{r+1}$ donc $2^r + 1 \leqslant 2d' + 1 \leqslant 2^{r+1} - 1$ donc $2^{r-1} \leqslant d' \leqslant d' + 1 \leqslant 2^r$.
   Si on a $2^p \leqslant n < 2^{p+1}$ alors, après p passages dans la boucle (donc p comparaisons) on cherche parmi 1 ou 2 éléments donc on fait 0 ou un passage dans la boucle puis la comparaison finale.
   le nombre de comparaisons est donc $p+1$ ou $p+2$.

Chapitre VIII

Listes : 2

Résumé

Nous avons défini le type `list` *de python et les fonctions de base : on les retrouve dans la plupart des langages de programmation, avec un type très souvent appelé* **tableau** *(array). Dans ces langages apparaît souvent un autre type d'assemblage, appelé liste, qui se construit et s'utilise pas-à-pas. Dans le langage python ces deux types sont combinés et nous allons étudier les actions supplémentaires sur les listes.*

1 Création de liste par augmentations

1.1 Définition

Jusqu'à présent nous utilisions les listes avec une longueur fixée : on pouvait changer les valeurs de chacune des positions mais on ne pouvait pas ajouter un élément supplémentaire.
On peut créer une **nouvelle** liste avec un élément de plus :

```
>>> l = [4, 3, 7, 6, 0]
>>> l1 = l + [5]
>>> l1
[4, 3, 7, 6, 0, 5]
>>> l
[4, 3, 7, 6, 0]
```

Cette opération ne modifie pas la liste initiale mais crée une nouvelle liste : cela nécessite de copier tous les éléments et a donc un coût que l'on souhaite éviter.
Python a prévu cette possibilité sous la forme d'une méthode.

Définition : Méthode
Une méthode est une fonction d'un type spécial qui est invoquée en ajoutant son nom **après** *l'objet auquel elle s'applique avec un point de séparation. Une méthode peut avoir des paramètres, ils seront placés classiquement entre les parenthèses qui suivent le nom de la méthode.*

L'instruction `liste.append(x)` attache l'élément `x` au bout de la liste `liste`. C'est une instruction élémentaire qui procède sans affectation, elle ne fait que modifier sans créer.

```
>>> l = [4, 3, 7, 6, 0]
>>> l.append(5)
>>> l
[4, 3, 7, 6, 0, 5]
```

Cette opération a un coût constant [1], il ne dépend pas de la longueur de la liste initiale.

1. Cela n'est vrai qu'en moyenne, on parle de coût amorti.

1.2 Usage

On obtient ainsi une autre méthode pour construire une liste.
En voici quelques exemples

Application d'une fonction aux éléments d'une liste

```
def carre(liste):
    n = len(liste)
    l2 = [0]*n
    for x in liste:
        l2[i] = x**2
    return l2
```

```
def carre(liste):
    l2 = []
    for x in range(n):
        l2.append(x**2)
    return l2
```

On voit que, même si on utilise la lecture directe des éléments de la liste (`for x in liste`), la méthode classique nécessite de connaître la longueur de la liste. Cependant la méthode la plus directe est d'utiliser la construction Python :

```
def carre(liste):
    return [x**2 for x in liste]
```

Calcul des termes d'une suite

```
def fibonacci(n):
    F = [0]*(n+1)
    F[0] = 0
    F[1] = 1
    for i in range(2, n+1):
        F[i] = F[i-1] + F[i-2]
    return F
```

```
def fibonacci(n):
    F = [0, 1]
    for i in range(2, n+1):
        F.append(F[i-1] + F[i-2])
    return F
```

Dans le cas des adjonction on peut remplacer le calcul par `F.append(F[-1] + F[-2])`.

Filtrage d'une liste

On veut extraire d'une liste ses termes positifs.

```
def positifs(liste):
    pos = []
    for x in liste:
        if x >= 0:
            pos.append(x)
    return pos
```

Ici l'écriture classique n'est pas raisonnable, il faudrait commencer par calculer le nombres de termes positifs puis les écrire dans une liste de taille adaptée.

Exercice VIII.1
Écrire cette fonction.
Ici encore, Python fournit une construction très efficace.

```
def positifs(liste):
    return [x for x in liste if x >= 0]
```

2 Autres méthodes

L'opération inverse de `append` est notée `pop` ; l'instruction `liste.pop()` a deux effets
1. elle modifie la liste en lui enlevant son dernier élément,
2. elle renvoie ce dernier élément. Il sera souvent utile de conserver ce dernier élément dans une variable :
   `a = liste.pop()`.

Il est indispensable d'écrire les parenthèses.

Il existe d'autres méthodes qui modifient une liste. Ce ne sont plus des opérations élémentaires, leur temps d'exécution dépend de la taille.
1. `liste.pop(k)` qui enlève l'élément d'indice k de la liste et le renvoie.
2. `liste.remove(x)` qui enlève la première apparition de x dans la liste. Si x n'est pas présent dans la liste, la méthode renvoie une erreur.
3. `liste.insert(i,x)` qui insère x dans la liste à la position i en décalant les termes suivant.
4. `liste.reverse()` qui retourne la liste.
5. `liste.sort()` qui trie la liste.

On peut simuler le comportement de `liste.pop(k)` à l'aide d'une fonction.

```
def enlever(k, liste):
    a = liste[k]
    n = len(liste)
    for i in range(k, n-1):
        liste[i] = liste[i+1]
    liste.pop()
    return a
```

On voit qu'on effectue $n - 1 = k$ affectations, le temps d'exécution dépend de la longueur.

Exercice VIII.2
Simuler de même les méthodes `remove` *et* `insert`*.*

3 Tuples

Python définit aussi les **tuples** : un tuple est une suite de composants de types quelconques, indexés par leur position, de longueur fixée et dont les éléments ne sont pas modifiables.
Ils sont représentés par des suites parenthésées mais on peut omettre les parenthèses :

```
>>> a = 2, 3, 7
>>> a
(2, 3, 7)
```

Les éléments sont accessibles de la même manière que pour les listes, `a[1]` renverra 3 dans l'exemple ci-dessus, mais ils ne sont pas affectables : `a[2] = 5` renvoie une erreur.
Les méthodes ne sont pas applicables à un tuple.
L'usage des tuples sera donc, le plus souvent, de transmettre une information composée, en particulier pour un retour multiple d'une fonction. Dans ce cas il est recommandé de distribuer (**cast**) les composantes directement.
Par exemple, la fonction suivante renvoie un tuple

```
def coordonnées(r, theta):
    x = r*math.cos(theta)
    y = r*math.sin(theta)
    return x, y
```

Elle est utilisée sous la forme

```
x, y = coordonnées(3, math.pi/4)
```

4 Décomposition en base 2

La représentation interne des entiers dans un ordinateurs se fait en base 2.
Elle s'appuie sur la possibilité d'écrire tout entier positif $n < 2^{p+1}$ de manière unique sous la forme

$$n = \sum_{k=0}^{p} \epsilon_k 2^k \text{ avec } \epsilon_k \in \{0, 1\}$$

Pour calculer les ϵ_k, on utilise les propriétés suivantes

1. Comme 2^k est pair pour $k \geqslant 0$, ϵ_0 vaut 1 si et seulement si n est impair, c'est le **bit de parité**. ϵ_0 est donc la valeur de `n%2`.
2. Pour $0 \leqslant q \leqslant p$, la décomposition de la division entière de n par 2^q est $\sum_{k=q}^{p} \epsilon_k 2^{k-q}$.
   ϵ_q est donc la valeur de `(n//2**q)%2`.
3. Pour $q > p$ la division entière de n par 2^q donne 0, il n'y a plus de composante à calculer. On peut donc calculer la liste des ϵ_k utiles sans connaître p à l'avance en s'arrêtant dès que le quotient `n//2**q` vaut 0.

On va donc calculer la liste des coefficients [e0, e1, ..., ep] par adjonctions successives. On remarque que l'on obtient le coefficient de 2^0 (de poids faible) en premier ; si on a besoin des coefficients dans l'ordre inverse, on retournera la liste obtenue.

Voici une première écriture possible.

```
def base2(n):
    b2 = []
    q = 0
    while n//2**q > 0:
        e = (n//2**q)%2
        b2.append(e)
        q = q + 1
    return b2
```

On remarque que l'on fait des calculs inutiles :

1. `n//2**q` est calculé deux fois,
2. ce terme est une opération complexe alors qu'on peut passer de `n//2**q` à `n//2**(q+1)` simplement en divisant par 2.

Voici une écriture plus efficace.

```
def base2(n):
    b2 = []
    while n > 0:
        e = n%2
        b2.append(e)
        n = n//2
    return b2
```

5 Solutions

Solution de l'exercice VIII.1 -

```
def positifs(liste):
    nb_pos = 0
    for x in liste:
        if x >= 0:
            nb_pos = nb_pos + 1
    pos = [0]*nb_pos
    k = 0
    for x in liste:
        if x >= 0:
            pos[k] = x
            k = k + 1
    return pos
```

Le code demande 12 lignes.

Solution de l'exercice VIII.2 -

```
def oter(x, liste):
    n = len(liste):
    k = 0
    while k < n and liste[k] != x:
        k = k + 1
    if k < n:
        for i in range(k, n-1):
           liste[i] = liste[i+1]
        liste.pop()
```

La fonction laisse la liste intacte si x n'en est pas élément, ce n'est pas tout-à-fait le même comportement que la méthode.

```
def inserer(x, k, liste):
    n = len(liste):
    liste.append(x)
    for i in range(n, k, -1):
        liste[i] = liste[i-1]
    liste[k] = x
```

Chapitre IX

Textes et fichiers

1 Le type `str`

Nous avons déjà rencontré des chaînes de caractères lors de l'affichage de certains résultats dans le chapitre sur les variables.
Une chaîne de caractères est un assemblage de caractères.
La plupart des langages définissent un type spécialisé, souvent appelé `string`.

Les chaînes de caractères Python sont des assemblages :

1. homogènes, ils ne contiennent que des caractères,
2. dont les éléments sont accessibles par leur indice,
3. non mutables : on ne peut en modifier ni la longueur, ni les éléments, contrairement aux listes.

- On définit une chaîne en écrivant les caractères entre guillemets simples ou doubles : `mot = 'bonjour'` ou `nom = "Tournesol"`. La chaîne vide s'écrit donc `''` ou `""`.
- Le type des chaînes de caractères en Python est **`str`** :

```
>>> type('oui')
<class 'str'>
```

- On accède aux caractères d'une chaîne par leur numéro, sous la forme `ch[i]`. La numérotation démarre à 0. Le nombre de caractères d'une chaîne est donné par `len(ch)`.
- Dans une boucle, on peut parcourir les caractères constituant une chaîne par leurs indices

```
n=len(ch)
for i in range(n):
    x=ch[i]
    ...
```

mais on peut aussi le faire sous la forme :

```
for x in ch:
    ...
```

2 Fonctions, opérations et méthodes sur les chaînes

Les fonctions imposées par le programme sont la création, l'accès à un caractère, la concaténation et les conversions de type.

- La concaténation permet de joindre deux chaînes et d'en créer une nouvelle.

```
>>> ch1 = "aujourd'hui,"
>>> ch2 = 'il fait beau'
>>> ch3 = ch1 + ch2
>>> print(ch3)
aujourd'hui,il fait beau
```

- L'extraction d'une tranche se fait comme ce qui a été vu pour les listes.

```
>>> \type{ch} = "Il faut imaginer Sisyphe heureux"
>>> ch1=ch[1:4]
>>> ch2=ch[20:]
>>> print(ch1)
l f
>>> print(ch2)
yphe heureux
```

- Voici maintenant quelques exemples de changement de type :

```
>>> str(2.5)
'2.5'
>>> int('54')
54
>>> float('3.7')
3.7
>>> list('bonjour')
['b','o','n','j','o','u','r']
```

- On peut convertir les caractère en leur code ASCII et réciproquement.
  Pour récupérer le code ASCII de la lettre a, on demande `ord('a')`, qui renvoie `97`.
  L'instruction `chr(65)` renvoie `'A'`, c'est la lettre de code ASCII égal à `65`.

Python définit un grand nombre de méthodes dont l'argument est une chaîne de caractères. Nous allons en explorer certaines. Il n'est pas nécessaire de les connaître mais les outils acquis vont nous permettre de les écrire nous-même sous forme de fonction.

Décompte d'une lettre
`ch.count(a)` compte le nombre d'occurrences du caractère `a` dans la chaîne `ch`.

Première occurrence
`ch.index(a)` renvoie l'indice de la première occurrence du caractère `a` dans la chaîne `ch`.

Passage en majuscules
`ch.upper()` convertit tous les caractères alphabétiques de la chaîne `ch` en majuscules.

Découpage d'une chaîne
Dans le traitement des fichiers, nous aurons souvent besoin de découper des chaînes de caractères selon un critère. Par exemple, des phrases sont des mots séparés par des blancs, les données d'un fichier csv sont séparés par des points-virgule.
`ch.split(a)` est une méthode qui fournit la liste des chaînes de caractère extraites de `ch` qui étaient délimitées par le caractère `a` (ou le début ou la fin de la chaîne) ; le caractère `a` est enlevé. Par exemple

```
>>> 'Il fait beau et chaud'.split(' ')
['Il', 'fait', 'beau', 'et', 'chaud']
```

Exercice IX.1 — Écriture des méthodes
Écrire les fonctions

1. `compte(a, ch)` *qui renvoie le nombre d'apparitions d'une lettre* `a` *dans une chaîne de caractères,*
2. `premier_indice(a, ch)` *qui renvoie le premier indice d'apparition d'une lettre dans une chaîne de caractères ; la fonction renverra* -1 *si le caractère n'est pas dans la chaîne,*
3. `majuscules(ch)` *qui renvoie une chaîne de caractères obtenue à partir de ch en remplaçant toutes les minuscules non accentuées par des majuscules ; les majuscules et les minuscules se suivent dans le même ordre dans la liste des caractères donnés par la fonction* `ord`*,*
4. `separe(ch, a)` *qui renvoie la liste des chaînes extraites de* `ch` *en découpant de part et d'autre du caractère* `a`*.*

3 Recherche naïve d'un mot dans une chaîne de caractères

Supposons `texte` une chaîne de caractères et `motif` une chaîne de caractères de longueur inférieure à celle de `texte`. On s'intéresse à l'apparition du motif dans le texte.

- `motif` est-il une sous-chaîne de `texte` ?
- Si oui, combien de fois `motif` apparaît-il si on lit `texte` en entier ?
- À quel(s) endroit(s) de `texte` rencontre-t-on `motif` ?

Quelles sont les positions possibles ?

Si on note n la longueur du texte et p celle du motif, le motif peut démarrer au maximum à l'indice i avec $i + p - 1 \leqslant n - 1$, soit $i = n - p$. On utilisera donc une boucle `for i in range(n-p+1)`.

Comment comparer ?

La méthode de base consiste à comparer le caractère i du texte avec le caractère 0 du motif, puis le caractère $i + 1$ du texte avec le caractère 1 du motif et ainsi de suite jusqu'au dernier caractère du motif. En Python, cela revient à comparer la chaîne extraite `texte[i:i+p]` avec le motif. Bien qu'écrit en une seule instruction, ceci demande p opérations élémentaires (des comparaisons).

Les fonctions

On commence par repérer les apparitions du motif.

Programme IX.1 – Compter les occurences d'un motif

```
def nombreOcc(texte, motif):
    """ Entrée : 2 chaînes de caractères"
          Sortie : le nombre d'apparitions
                   de la seconde chaîne dans la première"""
    n = len(texte)
    p = len(motif)
    compt = 0   # compteur initialisé à 0
    for i in range(n - p + 1):
        if motif == texte[i:i + p]:
            compt = compt + 1
    return compt
```

Programme IX.2 – Repérer les occurences d'un motif

```
def listeOcc(texte,motif):
    """ Entrée : 2 chaînes de caractères"
          Sortie : la liste des positions d'apparitions
                   de la seconde chaîne dans la première"""
    n = len(texte)
    p = len(motif)
    liste = []
    for i in range(n - p + 1):
        if motif == texte[i:i + p]:
            liste.append(i)
    return liste
```

On cherche maintenant uniquement si le motif est dans le texte. On renverra `True` si le motif est dans le texte ou `False` sinon.

Programme IX.3 – Dire si le motif est présent (3 versions)

```
def present1(motif,texte):
    """renvoie True ou False selon que le motif
    est dans le texte ou non"""
    n = len(texte)
    p = len(motif)
    rep = False
    for i in range(n-p+1):
        if motif == texte[i:i+p]:
            rep = True
    return rep

def present2(motif,texte):
    n = len(texte)
    p = len(motif)
    for i in range(n-p+1):
        if motif == texte[i:i+p]:
            return True
    return False

def present3(motif,texte):
    return nombreOcc(texte,motif) > 0
```

4 Les fichiers

Les fichiers permettent, entre autre, de stocker des résultats ou d'en récupérer : acquisitions physiques de données, recueil de statistiques,...
Nous allons ici simplement définir un moyen de lire et écrire des données dans un fichier texte simple accessible depuis l'ordinateur. Les moyens d'accéder aux répertoires dépendent du système et de l'environnement ; ils ne seront pas étudiés ici.

4.1 Ouvrir un fichier

Pour permettre à Python d'accéder à un fichier, on utilise l'instruction
`fichier = open(nomDuFichier,mode)`. Pour cette syntaxe,

- `fichier` est le nom que l'on donne à la variable qui est associée au fichier
- `nomDuFichier` est une chaîne de caractères qui indique où trouver le fichier. Si on a su indiquer comme répertoire courant celui qui contient le fichier, il suffit de donner son nom (`'nombresPremier.txt'` par exemple).
  Mais en général, il faudra donner l'arborescence globale, du style
  `'/home/moi/travail/python/nombresPremiers.txt'` dans une arborescence Linux.
- Le mode permet de préciser l'action souhaitée ; les principaux mode sont :
  - `'r'` pour *read* . C'est le mode lecture. On lit les données du fichier.
  - `'w'` pour *write*. C'est le mode écriture. C'est un mode destructif : l'ancien fichier est détruit et remplacé par ce que l'on met. Si le fichier n'existait pas, il est créé.
  - `'a'` pour *append*. C'est le mode ajout. On ajoute ce que l'on écrit à ce qui existait précédemment.

Après l'avoir utilisée, on doit fermer la communication avec le fichier par l'instruction **`fichier.close()`**.
Un fichier ouvert doit toujours être fermé.

4.2 Écrire dans un fichier

Un fichier est considéré comme une chaîne de caractères. Lorsque l'on utilise le mode `'w'`, cette chaîne initiale est vide (et le fichier est créé si nécessaire) ; lorsque l'on utilise le mode `'a'`, cette chaîne initiale est le contenu du fichier au moment de son ouverture.

L'instruction **`fichier.write(chaineCaractères)`** ajoute la chaîne de caractères passée en argument au fichier. En général, on structure un peu le fichier, notamment avec des passages à la ligne (`'\n'`).
Dans l'exemple suivant, on suppose que le répertoire de travail a été bien défini.

```
def prem(n): # on suppose n plus grand que 5
    l = [2]
    for k in range(3,n):
        premier = True
        for j in range(2,k-1):
            if k%j == 0:
                premier = False
        if premier:
            l.append(k)
```

Programme IX.4 – Les premiers nombres premiers

```
fichier=open('nombresPremiers.txt','w') # creation

liste = prem(20)
for n in liste:
    ch= str(n)+'\n'    # on cree la chaine
    fichier.write(ch)  # on l'ajoute
fichier.close()        # on ferme le fichier
# on veut rajouter 23
fichier = open('nombresPremiers.txt','a')
ch=str(23)+'\n'
fichier.write(ch)
fichier.close()
```

4.3 Lire un fichier

Il y a plusieurs méthodes pour lire un fichier ouvert en mode lecture.

- `ch` = fichier.read() lit tout le fichier et l'affecte à la variable `ch`.
- L'exemple ci-dessus donne

  ```
  '2\n3\n5\n7\n11\n13\n17\n19\n23\n'
  ```

- On peut lire tout le fichier grâce à **`liste = fichier.readlines()`**.
  Ceci crée la liste des lignes du fichier (les lignes sont délimitées par `'\n'`).
- L'exemple ci-dessus donne

  ```
  ['2\n', '3\n', '5\n','7\n','11\n','13\n','17\n','19\n','23\n']
  ```

  `len(liste)` donne alors le nombre de lignes présentes dans le fichier.
- On peut lire le fichier ligne par ligne . **`ch = fichier.readline()`** lit les caractères du fichier depuis la position actuelle jusqu'à `'\n'` (ou jusqu'au bout s'il n'y a plus ce caractère). On peut alors parcourir tout le fichier ligne par ligne grâce à une boucle (le point précédent nous donne le nombre de lignes à considérer).
  L'instruction **`for ligne in fichier`** permet d'accomplir cela directement.

Programme IX.5 – Lecture des premiers nombres premiers

```
fichier = open('nombresPremiers.txt','r') #m ode lecture
liste = []
for ligne in fichier:
    p = len(ligne)
    ch = int(ligne[0:p-1])  # on enleve le caractere \n
    liste.append(ch)
fichier.close()
print(liste)

[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23]
```

5 Solutions

Solution de l'exercice IX.1 -

1. Méthode `count`

```
def compte(a, ch):
    compteur = 0
    for x in ch:
        if x == a:
            compteur = compteur + 1
    return compteur
```

2. Méthode `index`

```
def premier_indice(a, ch):
    resultat  = -1
    n = len(ch)
    position  = 0
    while position < n and resultat = -1:
        if ch[position] == a:
            resultat = position
        position  = position + 1
    return resultat
```

3. Méthode `upper`

```
def majuscules(ch):
    ecart = ord("A") - ord("a")
    resultat  = ""
    for x in ch:
    k = ord(x)
        if ord("a") <= k and k <= ord("z"):
            y = chr(ord(x) + ecart)
        else:
            y = x # On ne change que a .. z
        resultat = resultat + y
    return resultat
```

4. Méthode `split`

```
def separe(ch, a):
    reponse = []
    mot = ""
    for x in ch:
        if x != a:
            mot = mot + x
        else:
            reponse.append(mot)
            mot = ""
    return reponse
```

Chapitre X

Entiers

On gardera à l'esprit les deux points suivants :

- Une machine n'a qu'un nombre fini d'unités de mémoire.
- Une unité de mémoire ou **bit** peut-être vue comme un paramètre pouvant valoir 1 ou 0.

On en déduit que N bits peuvent représenter 2^N objets distincts.
En général N sera un multiple de 8 : 8 bits sont assemblés en un **octet**.
Voici quelques utilisations typiques :

- 8 bits ($2^8 = 256$) : codage d'une couleur dans les formats JPEG, Blu-ray ...
- 10 bits ($2^{10} = 1\,024$) : code d'une couleur dans certains formats d'images professionnels.
- 16 bits ($2^{16} = 65\,536$) : codage des sons dans les formats audio grand public (CD, MP3...)
- 24 bits ($2^{24} = 16\,777\,216$) : codage des sons dans les formats audio professionnels (mastering).
- 32 bits ($2^{32} = 4\,294\,967\,296$) : codage des entiers dans la plupart des langages de programmation.
- 64 bits ($2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$) : codage des flottants dans la plupart des langages de programmation.

Cela permet, de manière générale, de stocker des ensembles finis de valeurs : on choisira N, le nombre de bits, suffisamment grand pour pouvoir majorer le nombre de valeurs distinctes par 2^N.
Par exemple si un voltmètre donne des résultats entre -10 V et 10 V avec une précision de 3 chiffres après la virgule, on veut pouvoir coder 20000 valeurs, il faudra alors utiliser 15 bits au minimum car on a $2^{14} = 16\,384$ et $2^{15} = 32\,768$.

1 Entiers non signés

On a vu qu'un entier est représenté par la suite de 0 et de 1 de son écriture en base 2.

Théorème :
Pour tout entier appartenant à $\{0, 1, 2, \ldots, 2^N - 1\}$ *il existe une suite unique* $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{N-1})$ *appartenant à* $\{0, 1\}^N$ *telle que* $n = \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k 2^k$

En général, un entier se voit allouer 32 bits pour sa valeur. [1] Cela permet de stocker 2^{32} valeurs.
On peut donc ainsi coder en mémoire les entiers naturels (non signés) de 0 à $2^{32} - 1$.
L'ordre le plus courant des bits est de placer les coefficients dans l'ordre décroissant des puissances : par exemple $142 = 2 + 4 + 8 + 128 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^7$ sera représenté par la suite 10001110 sur 8 bits et par la suite 00000000 10001110 sur 16 bits
Comme l'entier est découpé en octets pour le stockage, il y a deux grandes stratégies :

1. Si cette taille ne convient pas, certains langages obligent à demander explicitement la taille voulue dès le début ; d'autres, comme Python, peuvent dynamiquement réallouer de l'espace si nécessaire.

- La stratégie *little-endian*, la plus courante dans les microprocesseurs : l'octet stocké en premier est celui de poids le plus faible (autrement dit contenant le chiffre des unités). 142 sur 16 bits sera codé par 10001110 00000000.
- La stratégie *big-endian*, la plus courante dans les communications réseau : l'octet stocké en premier est celui de poids le plus fort. 142 sur 16 bits sera codé par 00000000 10001110.

L'écriture que nous utiliserons correspond à la stratégie big-endian.

Le calcul de la décomposition peut s'obtenir en remarquant que si $n = \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k 2^k$ alors $n = \varepsilon_0 + 2.\left(\sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_k 2^{k-1}\right)$ donc ε_0 est le reste de la division de n par 2 (`n % 2`) et $\sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_k 2^{k-1}$ est la décomposition du quotient de n par 2 (`n // 2`).
On peut remarquer qu'on obtient ainsi les coefficients "à l'envers", on doit donc remplir le tableau des coefficicents à partir de la droite.

```
def binaire(n,p):
    """Entrée : deux entiers
       Requis : 0 <= n < 2**p
       Sortie : la liste des p coefficients de l'écriture en
          base 2
                de n commençant le bit de poids faible"""
    bin = [0]*p
    for i in range(p):
        bin[p-1-i] = n%2
        n = n//2
    return bin
```

2 Entiers signés

Les entiers relatifs ont une valeur absolue et un signe, ce sont les entiers signés. Il faut réserver un bit pour stocker le signe, de sorte que l'on «perd un bit» pour stocker la valeur absolue. Sur N bits toujours les valeurs absolues seront codées sur $N-1$ bits.
L'usage général est de coder les entiers positifs entre 0 et $2^{N-1}-1$ comme dans le cas des entiers non signés : le premier bit(ε_{N-1}) sera toujours 0. Le codage des entiers négatifs peut être fait de deux manières (au moins).

- On peut coder la valeur absolue sur $N-1$ bits et donner la valeur 1 au bit de poids fort. Calculer l'opposé d'un entier est alors très simple (on change le bit de signe) mais l'addition est compliquée.
- On lui préfère le décalage : un entier p compris entre -2^{N-1} et -1 est codé par l'entier non signé $2^N + p$ qui est compris entre 2^{N-1} et $2^N - 1$. L'addition revient alors à calculer l'addition des entier non signés mais la multiplication par -1 n'est pas directe. On retrouve p en soustrayant 2^N.

Pour illustrer les calculs nous allons utiliser des entiers codés sur 8 bits : on code donc des entiers entre -128 et 127.

2.1 Addition

L'addition des entiers non signés se fait comme l'addition étudiée à l'école primaire ; on additionne des 0 et des 1 dont une retenue éventuelle dès que la somme dépasse 2.

1. 12 est codé par 00001100 et 25 par 00011001 d'où la somme

12	0	0	0	0	1	1	0	0
25	0	0	0	1	1	0	0	1
$12+25$	0	0	1	0	0	1	0	1

   On trouve bien le résultat $32+4+1=37$
2. -17 est codé par $256-17=239$ sous la forme 11101111

-17	1	1	1	0	1	1	1	1
25	0	0	0	1	1	0	0	1
$-17+25$	0	0	0	0	1	0	0	0

   On obtient 8, on remarque que la dernière retenue n'a pas été utilisée
3. De même

12	0	0	0	0	1	1	0	0
-17	1	1	1	0	1	1	1	1
$-17+12$	1	1	1	1	1	0	1	1

   On obtient le codage de $128+64+32+16+8+2+1=251$ qui correspond à $251-256=-5$

2.2 Opposé

- Si p est compris entre 1 et $2^{N-1}-1$ (on exclut le cas $p=0$) alors son opposé, $-p$, est codé par 2^N-p.
- Si p est compris entre $-2^{N-1}+1$ et -1 (on exclut le cas $p=-2^{N-1}$) alors il est codé par $q=2^n+p$ donc $-p$ vaut 2^N-q qui est codé directement.

Dans les deux cas on voit p et $-p$ sont représentés par des entiers non signés p' et $2^N-p'$.

Pour calculer $2^N-p'$ on peut remarque qu'on a $2^N=1+(2^N-1)=1+\sum_{k=0}^{N-1}2^k$.

Or, pour $p'=\sum_{k=0}^{N-1}\varepsilon'_k 2^k$, on a $(2^N-1)-p'=\sum_{k=0}^{N-1}(1-\varepsilon'_k)2^k$.

Ainsi, pour déterminer la représentation de $-p$:

1. on détermine la représentation de p,
2. on change chaque bit : 0 devient 1, 1 devient 0, on parle de complément à 2, c'est plutôt le complément à 1 (on remplace ε par $1-\varepsilon$),
3. on ajoute 1 pour obtenir la représentation de $-p$

Par exemple, pour -52 sur 8 bits

54	0	0	1	1	0	1	0	0
complément	1	1	0	0	1	0	1	1
ajouter 1	1	1	0	0	1	1	0	0

On retrouve bien la représentation de $128+64+8+4=204=256-52$

2.3 Problèmes d'overflow

Dans un des calculs ci-dessus on a vu qu'une retenue pouvait disparaître, dans le cas considéré on obtenait cependant le bon résultat. Lorsque la somme des deux entiers non signés est supérieure à 2^N, le résultat est en fait tronqué (il manque le bit correspondant à 2^N).
Mathématiquement, les additions se font modulo 2^N, c'est-à-dire que lors d'une opération on ajoute ou retranche un multiple de 2^n pour avoir un résultat appartenant à l'intervalle utilisé, ici $[-2^{N-1}; 2^{N-1} - 1]$. Cela peut engendrer des résultats faux.

1. Si on ajoute deux entiers positifs dont la somme est supérieure à 2^{N-1} on va aboutir à un entier négatif :

100	0	1	1	0	0	1	0	0
50	0	0	1	1	0	0	1	0
$50 + 100$	1	0	0	1	0	1	1	0

   On aboutit à la représentation de 150 qui est celle de $150 - 256 = -106$.
2. De même si on somme deux entiers négatifs avec un résultat inférieur à -2^{N-1} on obtient un entier positif :

-55	1	1	0	0	1	0	0	1
-99	1	0	0	1	1	1	0	1
$-55 - 99$	0	1	1	0	0	1	1	0

   Ici encore la dernière retenue n'est pas utilisée, on apboutit à $102 = -55 - 99 + 256$.

Quand on manipule des entiers très grands en valeur absolue, il faut surveiller d'éventuels problèmes de dépassement (**overflow**). Le problème est particulièrement sensible avec la multiplication.

Chapitre XI

Réels

On a vu que les entiers étaient représentés par leur écriture en base deux, formée de 0 et de 1.
On a vu aussi que les lettres étaient représentées par des entiers
(la correspondance peut se voir à l'aide des fonctions `ord` et `chr`).
Les nombres utilisés par les sciences sont, le plus souvent, des réels. Il faut imaginer une représentation de ces nombres qui permette de les stocker en utilisant toujours le même nombre de bits afin de les manipuler plus simplement.
Cependant toute représentation des réels se heurte au problème de la finitude : les réels, comme les entiers, ne sont pas bornés et il faudra limiter les valeurs possibles. Mais il y a aussi une infinité de réels dans un intervalle et il faudra représenter les réels par des valeurs approchées : tous les réels dans un intervalle de la forme $]a-h;a+h[$ seront représenté par le même flottant a.

Sur ces problèmes d'arrondi on pourra lire :

```
http://www-users.math.umn.edu/~arnold/disasters/patriot.html
https://fr.wikipedia.org/wiki/Vol_501_d'Ariane_5
```

1 Représentations

Nous allons étudier divers types de représentations possibles des réels et décrire leurs inconvénients. Dans les exemples étudiés on se restreint à l'usage de 8 bits (un `octet`) pour la représentation. Cette taille n'est pas réaliste pour un usage normal des flottants mais elle permet de visualiser ce qui se passe.

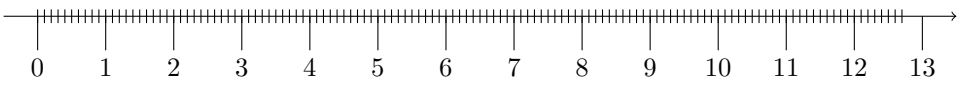
1.1 Nombre à virgule fixe

La première idée qui peut venir à l'esprit est de définir des approximations avec un nombre fixe de chiffres après la virgule. C'est ce qui est utilisé dans les tableurs.
Pour 8 bits on peut choisir

- le premier bit indique le signe,
- il reste 7 bits qui permettent de représenter $2^7 = 128$ valeurs,
- les entiers sont divisés par 10.

L'octet $\boxed{b_0}\boxed{b_1}\boxed{b_2}\boxed{b_3}\boxed{b_4}\boxed{b_5}\boxed{b_6}\boxed{b_7}$ $(b_i \in \{0,1\})$ représente donc

$$(-1)^{b_0}\frac{b_1+2b_2+4b_3+8b_4+16b_5+32b_6+64b_7}{10}$$



Ce format est en fait une représentation par des entiers avec un facteur d'échelle.
La précision est constante et il est très bien adapté dans le cas de calculs simples :

- échanges entre différents composants,
- calculs avec une seule unité de mesure : finance, tailles standardisées, ...

Les inconvénients sont nombreux

- La précision est constante : on approche les grandes valeurs avec la même précision que les petites. On a le plus souvent besoin d'une précision relative.
- La multiplication fait vite sortir de l'ensemble des valeurs possibles.
- On ne peut pas gérer des très petites valeurs ou des très grandes valeurs.

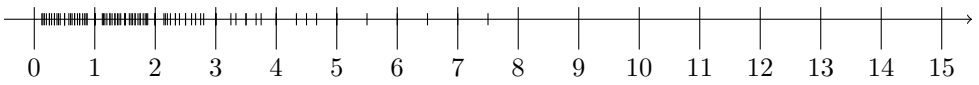
1.2 Nombres rationnels

On peut ne pas se limiter à des quotient à dénominateur fixe en codant par des nombres rationnels.
Pour 8 bits on peut choisir

- le premier bit indiquer le signe,
- 4 bits pour le numérateur,
- 3 bits pour le dénominateur, on ajoutera 1 pour éviter un dénominateur nul.

L'octet $\boxed{b_0}\boxed{b_1}\boxed{b_2}\boxed{b_3}\boxed{b_4}\boxed{b_5}\boxed{b_6}\boxed{b_7}$ $(b_i \in \{0,1\})$ représente donc

$$(-1)^{b_0}\frac{b_1+2b_2+4b_3+8b_4}{1+b_5+2b_6+4b_7}$$



Ce format est bien adapté à certains calculs algébriques
Mais il conserve de nombreux inconvénients.

- Les valeurs sont très irrégulièrement espacées.
- Il y a de nombreux doublons ($\frac{2}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, ...)
- Les calculs des fonctions usuelles (sin, cos, ln, exp, ...) ne sont pas aisés.

1.3 Nombres à virgule flottante

On peut enfin utiliser une virgule flottante : au lieu de considérer des entiers divisés par une constante, on considère les nombres de la forme $\pm n.b^k$ avec n entier strictement positif, b fixé (la base) et k entier relatif, l'exposant réel.
Dans la suite on ne considérera que la base 2 : les nombres sont de la forme $\pm n.2^k$. Les nombres représentés seront toujours des fractions de la forme $\frac{n}{2^s}$.
On utilisera donc

- un bit pour le signe
- p bits pour n
- q bits pour k
- avec $1+p+q$ égal au nombre de bits utilisés pour la représentation.

Les p bits permettent de définir 2^p valeurs possibles pour n.
On remarque qu'il peut exister plusieurs représentations pour un même nombre : par exemple $1,75$ est représenté par 7.2^{-2} mais aussi par 14.2^{-3}, 28.2^{-4} ...
Pour obtenir une représentation unique on va imposer n compris entre 2^p et $2^{p+1}-1$, il y a bien 2^p valeurs.
Ainsi les p bits définissent un entier non signé N_1, q autres bits définissent un entier N_2 et cela se traduit en le réel $(1)^s\big(2^p+N_1\big).2^{N_2-h} = \left(1+\frac{N_1}{2^p}\right)2^{N_2-h+p}$.
Le problème le plus immédiat est qu'on ne peut pas représenter 0, on verra dans la partie suivante une correction possible.

Pour 8 bits on peut choisir
- le premier bit indiquer le signe,
- $p = 4$ bits pour la mantisse.
- $q = 3$ bits pour l'exposant, que l'on décale en retranchant 3 pour obtenir des exposants entre -3 et 4.

L'octet $\boxed{b_0}\boxed{b_1}\boxed{b_2}\boxed{b_3}\boxed{b_4}\boxed{b_5}\boxed{b_6}\boxed{b_7}$ $(b_i \in \{0,1\})$ représente donc

$$(-1)^{b_0}\left(1+\frac{m}{16}\right)2^{e-3} \text{ avec } m = b_7 + 2b_6 + 4b_5 + 8b_4 \text{ et } e = b_3 + 2b_2 + 4b_1$$

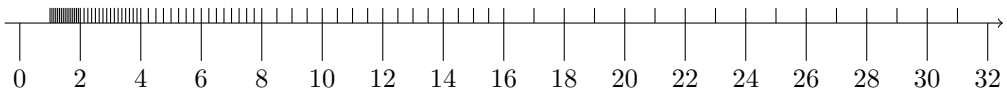


Figure XI.1 – Nombres représentables supérieurs à 1

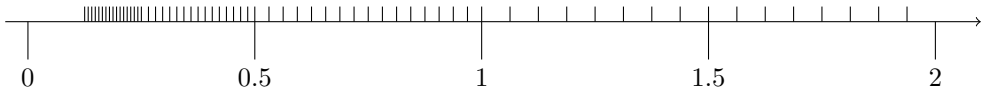


Figure XI.2 – Nombres représentables entre 0 et 2

Exemples
1. Le plus petit nombre positif représentable est $\left(1+\frac{0}{16}\right)2^{0-3} = 0,125$.
2. Le suivant est $\left(1+\frac{1}{16}\right)2^{0-3} = 0,1328125$.
3. Le grand petit nombre représentable est $\left(1+\frac{1}{5}16\right)2^{7-3} = 31,0$.
4. `01011011` donne $e = 5$ et $m = 11$ donc représente $\left(1+\frac{11}{16}\right)2^{5-3} = 6,75$.
5. Pour représenter π on commence par se placer entre 1 et 2 donc on considère $\frac{\pi}{2}$.
   On veut $\frac{\pi}{2}$ proche de $1+\frac{m}{16}$ donc m entier proche de $16\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = 9,1327....$
   On choisit d'arrondir au plus proche. [1]
   On approche donc π par $\left(1+\frac{9}{16}\right)2^1 = 3,125$.
   On a $m = 9$ et $e = 4$ donc π est représenté par `01001001`

1.4 Dénormalisation

Les nombres à virgule flottante permettent une meilleure répartition des nombres représentables : il y a le même nombre de valeurs entre a et $2a$ pour tout a. On parvient ainsi à une meilleure étendue des valeurs pour un nombre de bits déterminé.
Cependant la figure XI.2 montre un problème important : il n'y a pas de réel représentable autour de 0 alors que la précision est bonne au delà du premier réel représenté.
Pour obtenir un meilleur résultat on choisit de **dénormaliser** les nombres représentés lorsque l'exposant e est nul.
Dans le cas d'une représentation avec 8 bits on remplace $(-1)^{b_0}\left(1+\frac{m}{16}\right)2^{0-3}$ par $(-1)^{b_0}\frac{m}{16}2^{0-3+1}$.
La précision est moindre pour les petits flottants mais on approche des nombres autour de 0.

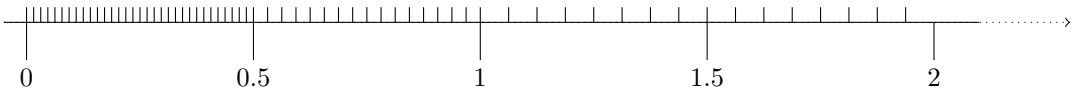


Figure XI.3 – Nombres dénormalisés

1. Pour approcher un nombre de la forme $\frac{n}{2}$, on choisira l'entier pair le plus proche.

1. Le plus petit nombre positif représentable est maintenant $\frac{1}{16}2^{-2} = 0,015625$.
2. $0,015625$ est le pas pour les premiers flottants.
3. Les nombres représentables au-delà de $0,25$ sont les mêmes.

Pour des calculs scientifiques, cette représentation est celle qui est choisie.
Elle a de nombreux avantages mais il reste des problèmes qui rendent l'interprétation des calculs parfois difficiles. On verra dans la suite quelques-uns de ces problèmes.

2 Les nombres flottants dans Python

Les langages modernes utilisent des réels définis en virgule flottante sur 32 bits (simple précision) ou sur 64 bits (double précision) en respectant un standard mondial : la norme IEEE-754.
Python, dans la version 3, n'utilise que des flottants sur 64 bits.
Dans cette représentation les bits de l'exposant sont placés avant ceux de la mantisse.

2.1 Les normes IEEE-754

La norme est définie, pour 32 bits, par

- un bit pour le signe,
- 8 bits pour l'exposant donc e est compris entre 0 et 255,
- le décalage est $2^7 - 1 = 127$ et les exposant 0 et 255 ne sont pas utilisés, ils sont réservés pour des nombres dénormalisés,
- il reste 23 bits pour la mantisse.

Les 4 octets $\boxed{b_0 \mid b_1 \mid \cdots \mid b_{30} \mid b_{31}}$ représentent donc

$$(-1)^{b_0}\left(1+\frac{m}{2^{23}}\right)2^{e-127} \text{ avec } m=\sum_{k=9}^{31} b_k.2^{31-k} \text{ et } e=\sum_{k=1}^{8} b_k.2^{8-k}$$

La norme est définie, pour 64 bits, par

- un bit pour le signe,
- 11 bits pour l'exposant donc e est compris entre 0 et 2047,
- le décalage est $2^{10} - 1 = 1023$ et les exposants 0 et 2047 ne sont pas utilisés, ils sont réservés pour des nombres dénormalisés,
- il reste 52 bits pour la mantisse.

Les 8 octets $\boxed{b_0 \mid b_1 \mid \cdots \mid b_{62} \mid b_{63}}$ représentent donc

$$(-1)^{b_0}\left(1+\frac{m}{2^{52}}\right)2^{e-1023} \text{ avec } m=\sum_{k=12}^{63} b_k.2^{63-k} \text{ et } e=\sum_{k=1}^{11} b_k.2^{11-k}$$

2.2 Exemples

Pour coder 11.0, on l'écrit

$$11.0=\frac{11}{8}.2^3=\frac{8+3}{8}.2^{1026-1023}=\left(1+\frac{3.2^{49}}{2^{52}}\right).2^{1026-1023}$$

avec $3 = 2^0 + 2^1$ et $1026 = 2^1 + 2^{10}$ donc le codage sur 64 bits est

$$\underbrace{\boxed{0}}_{\text{signe}}\underbrace{\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}}_{\text{1023+exposant}}\underbrace{\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{\ldots}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}}_{\text{mantisse sur 52 bits}}$$

Pour coder le nombre d'Avogadro $N = 6.0210^{23}$,

1. $2^{78} \leqslant N < 2^{79}$
2. $N.2^{-78} = 1.9918509150276906$
3. $0.9918509150276906 * 2^{52} = 4466899411325793$
4. 4466899411325793 en vase 2 s'écrit
   `1111110111101001111100010000101010001101001101100001`
   ce qui donne les 52 derniers bits
5. le premier est 0, le signe est positif
6. les 12 suivants codent 75+1023 : `10001001101`

```
>>> (1+4466899411325793/2**52)*2**78
6.02e+23
```

Voici quelques valeurs obtenues avec la représentation sur 64 bits

- L'exposant $e = 1$ permet d'obtenir la valeur $\left(1 + \frac{0}{2^{52}}\right) 2^{-1023} \sim 10^{-308}$
- Les nombres dénormalisés sont de la forme $\frac{k}{2^{52}}.2^{-1023}$. Le plus petit flottant dénormalisé strictement positif est donc $2^{-1075} \sim 10^{-324}$
- Le plus grand réel représentable est $\left(1 + \frac{2^{52}-1}{2^{52}}\right) 2^{1023} \sim 10^{308}$,
  le précédent diffère de $2^{971} \sim .10^{292}$.
- La précision pour les réels entre 1 et 2 est de $2^{-52} \sim 2.10{-}16$.
- Le plus petit entier qui n'est pas représenté sans erreur est $2^{53} + 1$.

```
>>> 2**53+1
9007199254740993
>>> float(2**53+1)
9007199254740992.0
```

2.3 Problèmes d'arrondi

Comparaison à zéro

Deux nombre trop proches l'un de l'autre seront considérés comme égaux.

```
>>> i=1
>>> while 1.0+10**(-i)>1.:
...     i+=1
>>> i
16
```

Cela signifie qu'une variation relative de 10^{-16} n'est par perceptible.

Exercice XI.1 — Equation de degré 2
Ecrire une fonction `racine(a,b,c)` qui donne le nombre de racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. La tester pour $a = 0.1$, $b = 0.6$, $c = 0.9$.
Le résultat de la soustraction de deux nombres a et b proches peut être de l'ordre de l'imprécision des calculs.
On a vu dans le paragraphe précédent que l'incertitude semble de l'ordre de 10^{-16} pour un nombre de l'ordre de 1 donc si on soustrait des nombres de l'ordre de 10^{16} on devrait avoir une imprécision de l'ordre de 1.

Sommes et ordre de sommation

Si on doit ajouter 3 nombres, on commencera par ajouter les deux plus petits puis on ajoutera le troisième, l'erreur générée sera alors moins grande car elle est proportionnelle au plus grand des termes de chaque addition.
Par exemple, on sait que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}$ a pour limite $\frac{\pi^4}{90}$.
Si on opère dans l'ordre, on commence par ajouter les plus grands termes, si on opère en partant de la fin, on commence par ajouter les plus petits.
Voici ce que donne le calcul :

```
from math import pi
def zeta(n):
    l=[1/i**4 for i in range(1,n+1)]
    somme=0
    for i in range(n):
        somme=somme+l[i]
    sommeinverse=0
    for i in range(n):
        sommeinverse=sommeinverse+l[-i-1]
    return somme-pi**4/90,sommeinverse-pi**4/90

print(zeta(66))
print(zeta(2**18))
```

```
(-1.1333517326850284e-06,-1.1333517324629838e-06)
(-2.7688962234151404e-13,2.220446049250313e-16)
```

2.4 Le module fractions

Si on utilise le module `fractions` on peut travailler avec des valeurs fractionnaires des nombres et éviter beaucoup des problèmes précédents. Le prix à payer en termes d'efficacité est par contre élevé et de toutes façons, ça ne règle pas le problème de la représentation des nombres irrationnels.

```
from fractions import Fraction
a=Fraction(16,-10)
```

Le module *decimal* permet aussi de travailler avec des nombres décimaux.

```
from decimal import Decimal
b=Decimal('1.1') #noter l usage des guillemets
```

On peut aussi choisir la précision (le nombre maximal de décimales).

```
from decimal import getcontext
getcontext().prec=100
```

Forcément, choisir 100 décimales rend les calculs moins rapides.

Chapitre XII

Intégration numérique

le but de ce chapitre est de calculer, de diverses manières l'intégrale d'une fonction f sur un segment $[a;b]$. On supposera, lors des calculs que la fonction f est de suffisamment dérivable.
On va procéder en deux temps :

1. on commence par approcher une intégrale en remplaçant la fonction par une constante ou une fonction affine,
2. puis on calculera une valeur approchée d'une intégrale en découpant le domaine d'intégration et en appliquant, sur chaque sous-intervalle, l'approximation ci-dessus.

1 Méthode des rectangles

On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ et on note $M_1 = \sup\big\{|f'(t)| \ ; \ a \leqslant t \leqslant b\big\}$.
On suppose qu'on a $a \leqslant \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant b$.
Si on approche f sur $[\alpha;\beta]$ par sa valeur en $\gamma \in [\alpha;\beta]$ alors on approche l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t$ par $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\gamma)\mathrm{d}t = (\beta-\alpha)f(\gamma)$ et l'erreur commise est $\displaystyle\int_\alpha^\beta \big(f(t)-f(\gamma)\big)\mathrm{d}t$.
On décompose alors l'intégrale sur n intervalles de largeur constante,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t \quad \text{avec } x_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

puis, en choisissant $y_k \in [x_k;x_{k+1}]$, on approche $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \simeq \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(y_k)$.

La méthode des rectangles à gauche consiste à choisir $y_k = x_k$: $R_{g,n} = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$

la méthode des rectangles à droite consiste à choisir $y_k = x_{k+1}$: $R_{d,n} = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$

Pour $f : x \mapsto= 3\sin\left(\frac{x+1}{2}\right)$ sur $[0;5]$ avec $n = 10$ on obtient les figures ci-dessous.
La partie hachurée représente la surface utilisée comme approximation de l'intégrale.

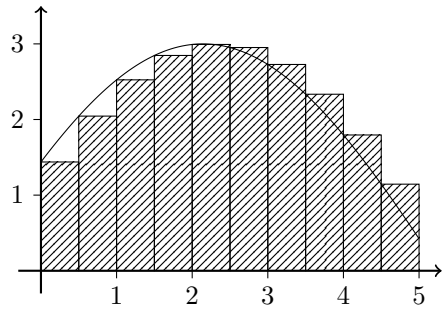


Figure XII.1 – Méthode des rectangles à gauche, $n = 10$

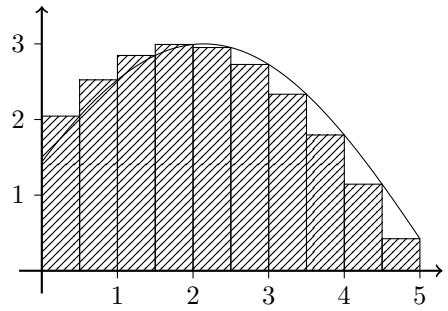


Figure XII.2 – Méthode des rectangles à droite, $n = 10$

Programme XII.1 – Méthode des rectangles (à droite)

```
def rectangleG(f, a, b, n):
    pas = (b - a)/n
    somme = 0
    for i in range(n):
        somme = somme + f(a + i*pas)
    return somme*pas
```

On notera en particulier l'usage de $a + k\frac{b-a}{n}$ pour le calcul des x_k : le calcul par ajouts successifs de $\frac{b-a}{n}$ à la valeur de a engendre une erreur en raison de l'accumulation des arrondis.

Mesure de l'erreur

Exercice XII.1
Prouver que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, pour $a \leqslant \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant b$, alors

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)dt - (\beta - \alpha)f(\gamma) \right| \leqslant \frac{M_1}{2}(\beta - \alpha)^2$$

On a donc la majoration $\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - R_{g,n} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_1}{2} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 = \frac{M_1}{2} \frac{(b-a)^2}{n}$
Pour gagner une décimale il faudra donc multiplier n par 10.
Augmenter n permet donc a priori d'avoir un résultat mathématiquement plus précis.
Cependant, plus on augmente le nombre de calculs, plus on cumule éventuellement des erreurs d'arrondi ; si on considère que celles-ci sont de l'ordre de 10^{-16} à chaque calcul, l'erreur totale est $\frac{1}{n} + 10^{-16}$ qui admet un minimum égal à 2.10^{-8} pour $n = 10^8$.

2 Méthode des trapèzes

On approche f sur $[x_k;x_{k+1}]$ par une fonction affine, $x \mapsto \alpha x + \beta$, égale à f aux extrémités $\big(x_k, f(x_k)\big)$ et $\big(\big(x_{k+1}, f(x_{k+1})\big)$. L'intégrale sur $[x_k;x_{k+1}]$ est alors approchée par la surface d'un trapèze.

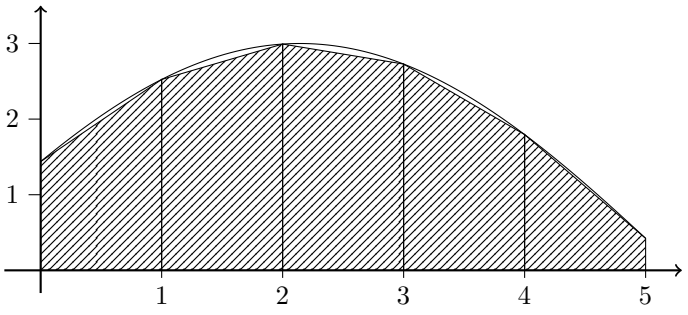


Figure XII.3 – Méthode des trapèzes, $n = 5$

Exercice XII.2
Prouver que si f est une fonction affine alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)dt = \frac{\beta-\alpha}{2}\big(f(\alpha)+f(\beta)\big)$.
On approche donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \simeq T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\big(f(x_k)+f(x_{k+1})\big) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}$

Programme XII.2 – Méthode des trapèzes

```
def trapeze(f, a, b, n):
    pas = (b - a)/n
    somme = 0
    for i in range(n):
        somme = somme + (f(a + i*pas) + f(a + (i+1)*pas))/2
    return somme*pas
```

Mesure de l'erreur

On suppose maintenant f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a;b]$ et on note $M_2 = \sup\big\{|f''(t)| \ ; \ a \leqslant t \leqslant b\big\}$.

Exercice XII.3
Prouver que si f est de classe $\mathcal{C}^2$, pour $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$, alors

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt - (\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right| \leqslant \frac{M_2}{12}(\beta-\alpha)^3$$

On a donc la majoration $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - T_n\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M_2}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 = \frac{M_2}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}$
Cette fois-ci, si on multiplie n par 10, on gagne mathématiquement 2 décimales.
Si on ajoute les erreurs d'arrondis, l'erreur totale est de l'ordre de $\frac{1}{n^2} + n.10^{-16}$ qui admet un minimum approximativement égal à 4.10^{-11} pour $n = 3.10^5$: on obtient une meilleure précision plus rapidement

3 Méthode de Simpson

On approche maintenant f sur $[x_k; x_{k+1}]$ par une fonction polynomiale de degré 2 qui prend les mêmes valeurs que f aux points x_k, x_{k+1} et $m_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$.

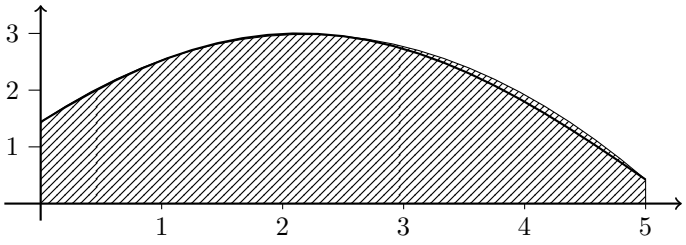


Figure XII.4 – Méthode de Simpson, n = 1

Exercice XII.4
Prouver que si f est une fonction polynomiale de degré 2 alors

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \frac{\beta-\alpha}{6}\left(f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + f(\beta)\right)$$

On approche donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par $= \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{f(x_k) + 4f(m_k) + f(x_{k+1})}{6}$.

Programme XII.3 – Méthode de Simpson

```
def Simpson(f, a, b, n):
    pas = (b - a)/n
    somme = 0
    for i in range(n):
        u = f(a + i*pas)
        v = f(a + (i+1/2)*pas)
        w = f(a + (i+1)*pas)
        somme = somme + (u + 4*v + w)/6
    return somme*pas
```

Mesure de l'erreur

On suppose maintenant f de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a; b]$ et on note $M_4 = \sup\{|f^{(4)}(t)| \ ; \ a \leqslant t \leqslant b\}$.

Exercice XII.5
Prouver que pour $a \leqslant \alpha \leqslant \gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant \beta \leqslant b$, alors

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt - \frac{\beta-\alpha}{6}\big(f(\alpha) + 4f(\gamma) + f(\beta)\big)\right| \leqslant \frac{M_4}{2880}(\beta-\alpha)^5$$

On a donc la majoration $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - S_n\right| \leqslant \dfrac{M_4}{2880} \times \dfrac{(b-a)^5}{n^4}$
Cette fois-ci, si on multiplie n par 10, on gagne 4 décimales.

Exercice XII.6
Si $M_4 = 72$ et $b - a = 1$ quelle est la meilleure approximation que l'on peut obtenir.
Quelle valeur de n ne faut-il pas dépasser ?
On supposera que les erreurs d'arrondi sont $n.10^{-16}$

4 Solutions

Solution de l'exercice XII.1 - $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t-(\beta-\alpha)f(\gamma)=\int_\alpha^\beta \big(f(t)-f(\gamma)\big)\mathrm{d}t.$
Or l'inégalité des accroissement finis donne $\big|f(t)-f(\gamma\big|\leqslant|t-\gamma|M_1$ donc, en découpant en deux l'intégrale, on a $\left|\displaystyle\int_\alpha^\gamma f(t)\mathrm{d}t-(\beta-\alpha)f(\gamma)\right|\leqslant\int_\alpha^\gamma M_1(\gamma-t)\mathrm{d}t=\frac{M_1}{2}(\gamma-\alpha)^2,$
de même $\left|\displaystyle\int_\gamma^\beta f(t)\mathrm{d}t-(\beta-\alpha)f(\gamma)\right|\leqslant\frac{M_1}{2}(\beta-\gamma)^2$
et on a $(\gamma-\alpha)^2+(\beta-\gamma)^2\leqslant(\beta-\alpha)^2$ pour $\alpha\leqslant\gamma\leqslant\beta$.

Solution de l'exercice XII.2 - $f(t)=At+B$.

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta(At+B)\mathrm{d}t&=\left[A\frac{t^2}{2}+Bt\right]_\alpha^\beta=A\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}+B(\beta-\alpha)\\&=\frac{\beta-\alpha}{2}\big(A\alpha+A\beta+2B\big)=\frac{\beta-\alpha}{2}\big(f(\alpha)+f(\beta)\big)\end{aligned}$$

Solution de l'exercice XII.3 -

1. On pose $g(x)=\displaystyle\int_\alpha^x f(t)\mathrm{d}t-(x-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(x)}{2}+A(x-\alpha)^3$ avec A choisi tel que $g(\beta)=0$.
2. On a $g(\alpha)=g(\beta)=0$ donc il existe $c_1\in]\alpha;\beta[$ tel que $g'(c_1)=0$.
3. $g'(x)=f(x)-(x-\alpha)\frac{f'(x)}{2}-\frac{f(\alpha)+f(x)}{2}+3A(x-\alpha)^2=\frac{f(x)-f(\alpha))}{2}-(x-\alpha)\frac{f'(x)}{2}+3A(x-\alpha)^2$
4. $g'(\alpha)=g'(c_1)=0$ donc il existe $c_2\in]\alpha;c_1[$ tel que $g''(c_2)=0$.
5. $g''(x)=-(x-\alpha)\frac{f''(x)}{2}+6A(x-\alpha)2$ donc $g''(c_2)=0$ avec $c_2-\alpha\neq0$ donne $A=\frac{1}{12}f''(c_2)$
6. $g(\beta)=0$ donne $\left|\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t-(\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right|=\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}|-f''(c_2)|\leqslant\frac{M_2}{12}(\beta-\alpha)^3$

Solution de l'exercice XII.4 - $f(t)=At^2+Bt+C$.

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta(At^2+Bt+C)\mathrm{d}t&=\left[A\frac{t^3}{3}+B\frac{t^2}{2}+Ct\right]_\alpha^\beta=A\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}+B\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}+C(\beta-\alpha)\\&=\frac{\beta-\alpha}{6}\big(A\alpha^2+A(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+A\beta^2+B\alpha+2B(\alpha+\beta)+B\beta+C+4C+C\big)\\&=\frac{\beta-\alpha}{6}\left(f(\alpha)+4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f(\beta)\right)\end{aligned}$$

En fait l'égalité est vraie aussi pour les polynômes de degré 3.
On peut le prouver en la vérifiant pour la fonction $t\mapsto(2t-a-b)(t-a)(t-b)$.

Solution de l'exercice XII.5 -

1. On pose $\delta = \frac{\beta-\alpha}{2}$ d'où $\alpha = \gamma - \delta$ et $\beta = \gamma + \delta$
2. On pose $g(x) = \displaystyle\int_{\gamma-x}^{\gamma+x} f(t)\mathrm{d}t - \frac{x}{3}\big(f(\gamma+x)+4f(\gamma)+f(\gamma-x)\big) + Ax^5$ avec A tel que $g(\delta) = 0$.
3. On a $g(0) = g(\delta) = 0$ donc il existe $c_1 \in]0;\delta[$ tel que $g'(c_1) = 0$.
4. $g'(x) = \frac{2}{3}\big(f(x+\gamma)+f(x-\gamma)\big) - \frac{4}{3}f(\gamma) - \frac{x}{3}\big(f'(\gamma+x)-f'(\gamma-x)\big) + 5Ax^4$
5. $g'(0) = g'(c_1) = 0$ donc il existe $c_2 \in]0, c_1[$ tel que $g''(c_2) = 0$.
6. $g''(x) = \frac{1}{3}\big(f'(x+\gamma)-f'(x-\gamma)\big) - \frac{x}{3}\big(f''(\gamma+x)+f''(\gamma-x)\big) + 20Ax^3$
7. $g''(0) = g''(c_2) = 0$ donc il existe $c_3 \in]0, c_2[$ tel que $g^{(3)}(c_3) = 0$.
8. $g^{(3)}(x) = -\frac{x}{3}\big(f^{(3)}(\gamma+x) - f^{(3)}(\gamma-x)\big) + 60Ax^2 = x.h(x)$
9. On a $h(x) = -\frac{1}{3}\big(f^{(3)}(\gamma+x) - f^{(3)}(\gamma-x)\big) + 60Ax$ donc $h(0) = h(c_3) = 0$:
   il existe $c_4 \in]0, c_3[$ tel que $h'(c_4) = 0$.
10. $h'(x) = -\frac{1}{3}\big(f^{(4)}(\gamma+x) + f^{(4)}(\gamma-x)\big) + 60A$ donc $h'(c_a) = 0$ donne
    $A = \frac{1}{180}\big(f^{(4)}(\gamma+x) + f^{(4)}(\gamma-x)\big)$ d'où $|A| \leqslant \frac{M_4}{90}$
11. $g(\delta) = 0$ donne $\left|\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t - \frac{\beta-\alpha}{6}\big(f(\alpha)+4f(\gamma)+f(\beta)\big)\right| = |A|\delta^5 \leqslant \frac{M_4}{2880}(\beta-\alpha)^5$.

Solution de l'exercice XII.6 - Les erreurs totales sont donc $\frac{1}{40n^4} + 10^{-16}n$:
la fonction $x \mapsto \frac{1}{40x^4} + 10^{-16}x$ admet un minimum pour $-\frac{1}{10x^5} + 10^{-16} = 0$ donc $x = 10^{-3}$.
Il ne faut pas dépasser $n = 1000$, l'erreur optimale est $\frac{5}{4}10^{-13}$.

Chapitre XIII

Zéros de fonctions

Un des problèmes numériques les plus connus est celui de la résolution des équations : on se donne un équation sous la forme $f(x) = 0$ est on cherche, une valeur de x, x_0, telle que $f(x_0) = 0$. Dans la suite on nommera **zéro** de f une telle valeur.

On voit très vite qu'on a besoin de préciser le contexte :

- un zéro doit-il appartenir à un ensemble donné ?
- cherche-ton un zéro ou tous les zéros ?
- sait-on s'il existe un zéro, s'il est unique ?

On supposera ici que la fonction f est définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Ce problème est au cœur de nombreux résultats mathématiques :

- existence d'un zéro : théorème de Rolle
- unicité du zéro : injectivité
- résolution avec extractions de racines dans le cas des polynômes de degré 2, puis 3, puis 4
- fonctions réciproques, par exemple $\arcsin(a)$ est l'unique solution de $\sin(x) = a$ sur $[-\pi/2; \pi/2]$
- ...

Résoudre une équation est parfois considéré comme la recherche d'une expression du zéros à l'aide d'un ensemble de fonctions considérées comme connues. On considère plutôt les équations de la forme $f(x) = a$ avec f bijective et on cherche la fonction f^{-1}. Une forme d'expertise en mathématique serait alors de savoir résoudre le plus possible d'équations.

Cependant si l'objectif est d'avoir un valeur numérique du zéro, on n'aura pratiquement jamais une valeur exacte car les fonction utilisées ne sont exactement calculables. L'objectif de ce chapitre sera, inversement, de calculer une valeur approchée du zéro pour un ensemble très général d'équations, contenant celles que l'on estime résolubles mathématiquement.

On se place dans le cadre des fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ et on cherche des approximations d'une solution de $f(x) = 0$; on suppose que f admet au moins un zéro sur $[a; b]$.

Il sera souvent utile de se restreindre à un intervalle dans lequel on a prouvé que la fonction admet une racine unique : la figure XIII.1 représente ce type de cas.

Nous étudions dans ce chapitre deux méthodes :

1. la méthode de dichotomie est valable pour les fonctions continues et donne une approximation dans tous les cas où on a su encadrer un zéro de la fonction,
2. la seconde méthode, de Newton, nécessite d'avoir une fonction dérivable et peut ne pas donner d'approximation. Cependant, en cas de convergence, elle est très rapide. De plus elle se généralise au cas de recherche de zéros d'une fonctions de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$.

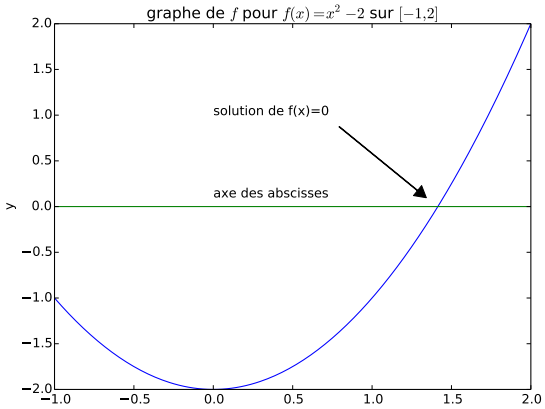


Figure XIII.1 – Fonction à zéro unique

1 Méthode de dichotomie

1.1 La méthode mathématique

On travaille ici sur un intervalle $I = [a, b]$ en supposant $a < b$ et $f(a)f(b) < 0$.
L'idée est d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour diminuer la largeur de l'intervalle d'étude par 2.

1. On pose $c = \frac{a+b}{2}$ et on calcule $f(c)$,
2. Si $f(a)f(c) < 0$, alors f s'annule sur $]a; c[$.
3. Sinon f s'annule sur $[c; b[$ et on étudie sur $[c, b]$

On peut alors itérer cette idée en notant $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et en construisant trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) de la façon suivante :

1. on pose $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et on calcule $f(c_n)$,
2. si $f(a_n)f(c_n) \leqslant 0$, alors on définit $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$,
3. sinon on définit $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

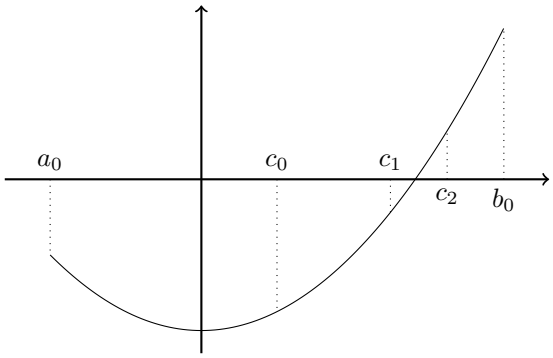


Figure XIII.2 – Premières valeurs de c_n

Pour l'exemple initial on a représenté, dans la figure XIII.2, les premières valeurs de c_n.
On a $a_1 = c_0$, $a_2 = a_3 = c_1$, $b_0 = b_1 = b_2$ et $b_3 = c_2$.

Théorème :
Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et leur limite commune est un zéro de f.
De plus on a $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$.

1.2 Algorithme

Programme XIII.1 – Calcul d'un zéro par dichotomie

```
def dichotomie(f, a, b, epsilon):
    """Entrées : un fonction, 3 flottants
       Requis  : a < b, f s'annule sur [a; b],  epsilon > 0
       Sortie  : une valeur approchée de f sur [a; b]
                 à epsilon près"""
    while b - a > epsilon:   # precision non atteinte
        c = (a+b)/2          # calcul du milieu de a et b
        if f(a) * f(c) <= 0:
            b = c            # on change l'extremite droite
        else:
            a = c            # on change l'extremite gauche
    return (a+b)/2
```

1.3 Analyse de l'algorithme

L'algorithme termine

Il faut prouver que l'on sort de la boucle `while`.
On a $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$ donc $b_n - a_n \leqslant \varepsilon$ pour n supérieur à un entier N.
`b - a` vaut $b_n - a_n$ après n passages dans la boucle donc la condition `b - a > epsilon` est fausse pour $n \geqslant N$: on est sûr que l'on n'itère la boucle qu'un nombre fini de fois.

L'algorithme est correct

Il faut prouver qu'il existe un réel r tel que $f(r = 0)$ et $|r - c| < \varepsilon$ si c est la valeur renvoyée par `dichotomie(f, a, b, epsilon)`. La limite commune, r, des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un zéro de f et vérifie $a_n \leqslant r \leqslant b_n$ on a donc $a - \dfrac{a+b}{2} \leqslant r - \dfrac{a+b}{2} \leqslant b - \dfrac{a+b}{2}$ à chaque étape d'où $\left|r - \dfrac{a+b}{2}\right| \leqslant \dfrac{b-a}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$ à la sortie de la fonction.

Nombre d'opérations

On peut déterminer le nombre de parcours de la boucle en cherchant le premier entier k tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leqslant \epsilon$. On a alors $\dfrac{b-a}{\epsilon} \leqslant 2^k$ c'est-à-dire $\ln\left(\dfrac{b-a}{\epsilon}\right) \leqslant k * \ln(2)$. Il suffit donc $k = \left\lfloor \dfrac{\ln(\frac{b-a}{\epsilon})}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$ opérations à effectuer pour avoir une valeur approchée de r à ϵ près.

1.4 Remarques

- En pratique, on ne connaît pas toujours la fonction f en tout point mais on dispose seulement d'un nombre fini de ses valeurs (penser par exemple à l'acquisition d'un son numérique) sous la forme d'une liste $y = [y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}]$ de longueur n qui représente la liste des valeurs prises par la fonction.
  Si on suppose la fonction croissante (ou décroissante), une bonne approximation de la racine r sera alors y_q avec q le premier entier tel que $y_q > 0$ (y_{q-1} serait aussi une bonne approximation sans qu'on puisse vraiment les départager).
  On est donc amené à chercher, dans une liste ordonnée, le premier terme qui dépasse 0. Une méthode coûteuse serait de parcourir la liste jusqu'à trouver un terme positif, on utilisera plutôt une dichotomie comme on l'a vu dans le cours sur les recherches dans des listes triées. Voir l'exercice **??**.
- Le fait que l'algorithme termine est prouvé mathématiquement mais il faut tenir compte des erreurs dues à l'usage des flottants. Il vaut mieux éviter des valeur de `epsilon` trop petite pour que le calcul de `(a+b)/2` donne un résultat distinct de `a`. Dans la pratique on choisira ε supérieur à 10^{-12} fois l'ordre de grandeur de a et b.
- La valeur renvoyée n'est correcte que si les erreurs d'arrondi ne perturbent pas les tests.
  En effet un test de comparaison à 0 n'est pas fiable pour des flottants.
  Par exemple la fonction $f : x \mapsto \sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ est plate autour de son unique racine et le signe de $f(x)$ n'est pas bien calculé pour des valeurs de x proches de 0.

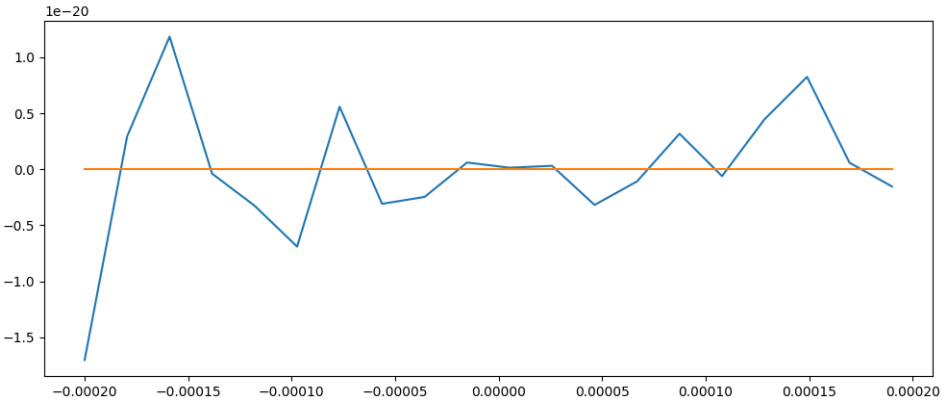


Figure XIII.3 – Signes non exacts de $x \mapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

`Dichotomie(f, -0.4, 0.6, 1e-6)` renvoie `0.000207996` qui n'est pas une valeur approchée à ε près.

2 Méthode de Newton

2.1 La méthode

On suppose pour cette méthode f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I
avec f s'annulant en au moins un point de I.
On part de $x_0 \in I$; la tangente à la courbe représentative de f en $\big(c, f(c)\big)$ recoupe l'axe des abscisses en un point $(x_1, 0)$. Si x_1 appartient à I, on réitère le procédé avec le point $(x_1, f(x_1))$.
On continue ainsi (quand c'est possible).
On remarque dans l'exemple de la figure XIII.4 que x_2 est proche d'une racine. Dans le graphe la tangente en $\big(x_2, f(x_2)\big)$ est indiscernable de la courbe donc x_3 sera une excellente approximation.

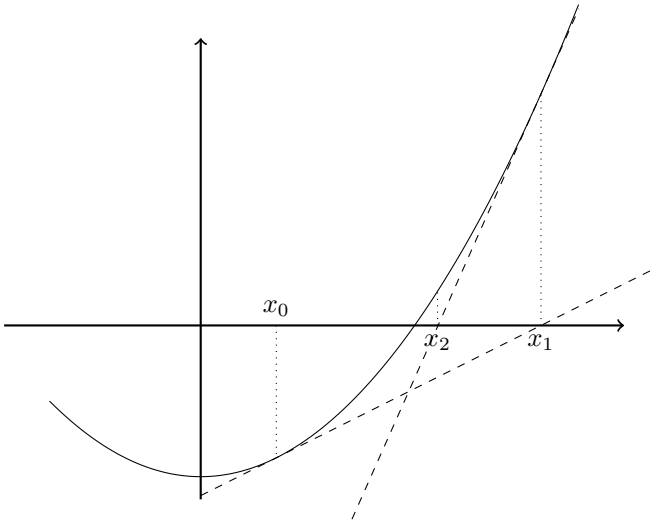


Figure XIII.4 – 2 étapes dans la méthode de Newton

La tangente en $(c, f(c))$, T_c, admet pour équation $y - f(c) = f'(c)(x - c)$.
La relation de récurrence qui définit la suite (x_n) est donc

$$x_0 = c \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

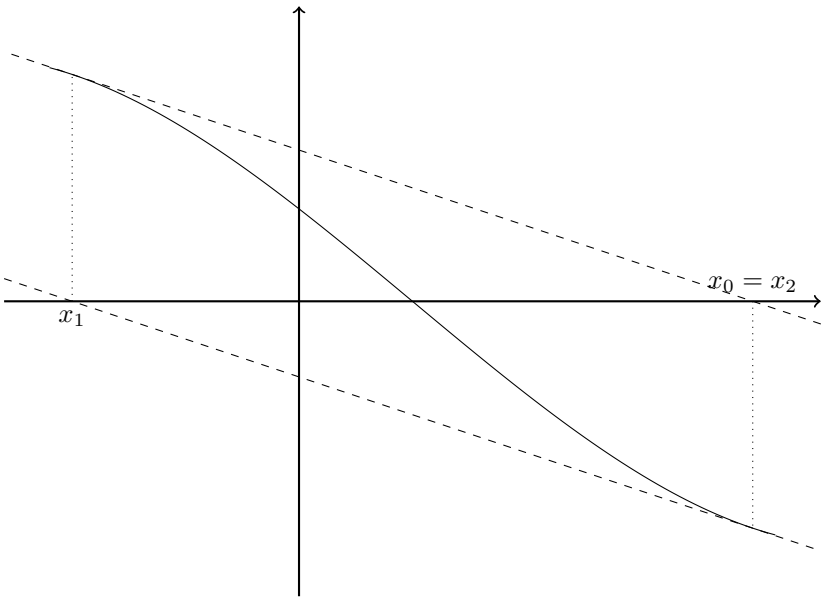
2.2 Convergence

La convergence est démontrable dans un cas particulier.

Théorème :
f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a;b]$ avec
- *f' et f'' de signe constant*
- *$f(a).f(b) < 0$.*

Si $x_0 = b$ quand f' et f'' sont de même signe ou $x_0 = a$ pour f' et f'' de signe opposés alors la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ est bien définie et monotone dans $[a;b]$.
Cette suite converge vers l'unique racine de f dans $[a;b]$.
On a, de plus $x_{n+1} - x_n \sim r - x_n$ quand n tend vers l'infini et $|r - x_{n+1}| \leqslant \dfrac{M_2}{m_1}(r - x_n)^2 = K(r - x_n)^2$ pour M_2 majorant de $|f''|$ sur $[a;b]$ et m_1 minorant de $|f'|$ sur $[a;b]$.

1. Dans le cas général, il peut ne pas y avoir de convergence :
   - soit parce que $f'(x_n) = 0$, par exemple pour $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$ et $x_0 = 2$
   - soit parce que la valeur de x_n n'appartient plus à un intervalle où on sait calculer f, par exemple pour $f(x) = 4\sqrt{x} - x$ et $x_0 = 1$
   - soit parce que la suite n'admet pas de limite, par exemple pour $f : x \mapsto \frac{1}{27}\big(2x^3 - 3x^2 - 21x + 11\big)$ et $x_0 = 2$. On trouve alors $x_1 = -1$ puis $x_2 = 2$, la suite est 2-périodique.



2. Si le zéro, r, de la fonction n'est pas un minimum ou un minimum, alors les conditions du théorème sont vérifiées dans un intervalle autour de r. Dans la pratique on pourra approcher un zéro par quelques étapes de dichotomie et on continuera ensuite avec la méthode de Newton.
3. En effet, si on a $|x_0 - r| \leqslant \frac{1}{2K}$, l'inégalité $|r - x_{n+1}| \leqslant K(r - x_n)^2$ donne $|r - x_n| \leqslant 1K.2^{2^n}$: la convergence mathématique est très rapide, le nombre de chiffres exact double à chaque étape. Cela signifie que si x_0 est une valeur approchée à 10^{-1}, il suffit de 4 étapes pour obtenir la précision maximale pour les flottants de 10^{-16}.

2.3 Codage de la méthode de Newton

La fonction calcule x_n en prenant en paramètres ϵ, x_0, f et f'. On doit définir f et f' par des fonctions python car on ne sait pas calculer la dérivée de f en Python.
L'équivalent $x_{n+1} - x_n \sim r - x_n$ du théorème permet de donner un critère de sortie de la boucle `while` sans connaître r.

Programme XIII.2 – Calcul d'un zéro par la méthode de Newton

```
def Newton(x0, f, df, epsilon):
    """Entrées : un réel, deux fonctions et un réel
       Requis : df est la dérivée de f, epsilon > 0
       Sortie : une valeur approchée d'un zéro de f"""
    x = x0
    difference = epsilon +1 # pour faire au moins un calcul
    while difference > epsilon:
        x_old = x
        x = x - f(x)/df(x)
        difference = abs(x - x_old)
    return x
```

3 fsolve

Le module `scipy` contient, dans la sous-bibliothèque `optimize` une fonction `fsolve` qui résout efficacement les équations. C'est la méthode à utiliser quand la résolution d'une équation est un outil d'un projet plus large.

```
from scipy.optimize import fsolve
```

- `fsolve` reçoit pour paramètres une fonction f dont on cherche un zéro et un valeur initiale autour de laquelle on cherche une solution.

```
def f(x):
    return x**2 - 2
>>> fsolve(f, 1)
array([1.41421356])
```

- On remarque que la réponse est une liste (en fait un tableau `numpy`) avec un seul élément : on devra sortir la réponse.

```
a = fsolve(f, 1)
zero = a[0]
```

- La raison est que `fsolve` peut chercher un zéro d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$

```
def F(u):
    x, y = u
    return x + y - 3, x*y -2
>>> fsolve(F, (1, 1))
array([1., 2.])
```

- Si la fonction dont on recherche un zéro contient des paramètres on peut les définir lors de la résolution à l'aide de l'argument optionnel nommé par `args`.

```
def g(x, a):
    return x**a -2
>>> fsolve(g, 1, args = 2.5)
array([1.31950791])
```

- On peut, par exemple, chercher un zéro d'un polynôme de degré 3 en donnant les coefficients.

```
def poly3(x, a, b, c):
    return x**3 + a*x**2 + b*x + c
>>> fsolve(poly3, 1, args = (1, 2, 3))
array([-1.2756822])
```

Chapitre XIV

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1 Présentation

1.1 Introduction

Depuis Newton les lois de la physique utilisent souvent les dérivées : Newton a d'ailleurs développé le calcul différentiel afin de pouvoir définir cette notion de dérivée.

On appelle équation différentielle une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées.

L'*ordre* d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Voici quelques exemples.

Radioactivité On note $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs à l'instant t, c'est-à-dire se désintégrant selon un processus aléatoire.
Il existe un nombre λ dit *constante radioactive* tel que $N'(t) = -\lambda N(t)$.
L'ordre est ici 1. On peut écrire $N'(t) = f\big((t, N(t)\big)$ avec $f : (t, u) \mapsto -\lambda u$.

Oscillations libres Un ressort exerce une force opposée et proportionnelle à l'allongement du ressort $F = -kx$.
Si on néglige les frottements, l'équation $m\vec{a} = \sum \vec{F}$ donne $mx'' = -kx$.
En notant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ on peut aussi écrire l'équation sous la forme $x'' + \omega_0^2 x = 0$: c'est une équation d'ordre 2.

Pendule L'équation du pendule pesant peut s'écrire $\theta'' = \frac{g}{l}\sin(\theta)$ où θ est l'angle avec la verticale et l est la longueur. C'est une équation d'ordre 2 et elle n'est pas linéaire : l'expression n'est pas linéaire en la fonction inconnue et ses dérivées.

Nous allons nous restreindre dans ce chapitre au cas des équations d'ordre 1. [1]

Les tracés et applications seront effectuées avec l'équation différentielle suivante : $\tau y'(t) + y(t) = Ke_0$; dont la solution est : $y(t) = Ke_0\big(1 - e^{-t/\tau}\big)$

Bien entendu, cet exemple n'est pas vraiment utile, on connaît déjà la solution. Les algorithmes que nous allons mettre en œuvre permettent d'approcher les solutions d'équations qu'on ne sait pas résoudre.

1. Nous verrons que cette limite est surmontable.

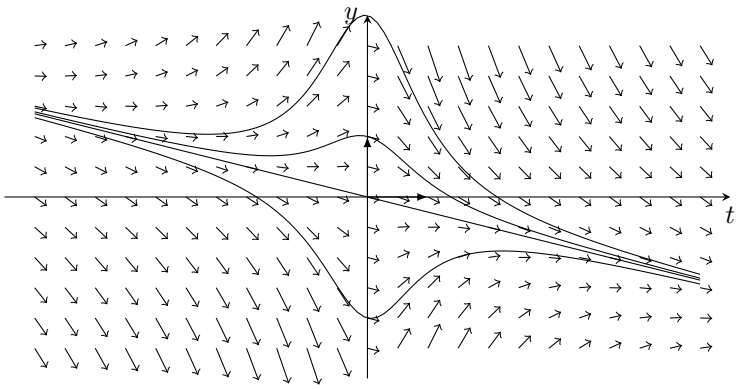
1.2 Définitions

φ est définie et continue sur une partie de $\mathbb{R}^2$ de la forme $U =]a;b[\times]c;d[$ [2] et à valeur dans $\mathbb{R}$. On lui associe l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' = \varphi(y,t)$$

Une solution de (E) est une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que
- $\big(t, \varphi(t)\big) \in \mathcal{U}$,
- $f'(t) = \varphi\big(f(t), t\big)$ pour tout $t \in I$.

Géométriquement cela signifie qu'une solution est telle que sa tangente en un point $\big(t, f(t)\big)$ admet $\varphi\big(f(t), t\big)$ pour pente.



On spécialise l'équation (E) en ajoutant des **conditions initiales**, c'est un couple $(t_0, y_0) \in U$ et on cherche une solution passant par ce point : une solution doit vérifier $f(t_0) = y_0$.

$$(E_0) \qquad \begin{cases} y' = \varphi(y,t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Si φ est suffisamment régulière, le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme l'existence d'un intervalle ouvert I contenant t_0 et d'une unique fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I tels que (I, f) est une solution de (E_0).

Le problème que nous chercherons à résoudre sera de déterminer une approximation de la solution sur un intervalle $[t_0, t_1]$ (ou $[t_1; t_0]$) avec les conditions initiales (t_0, y_0). On admettra qu'une telle solution existe : en particulier nous supposerons que φ vérifie les conditions de régularité.

1.3 Vers la résolution

Qu'est-ce qu'approcher une fonction ?
Une première approche est de se donner un temps t_1 et de calculer une valeur approchée de $f(t_1)$ où f est la solution de (E_0). C'est ce qui a été fait dans le calcul des intégrales. On peut noter qu'une intégrale est un cas particulier d'équation différentielle ; en effet calculer $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ revient à calculer la valeur en b de la solution de

$$(E_{int}) \qquad \begin{cases} y' = g(t) \\ y(a) = 0 \end{cases}$$

Or, lors du calcul de l'intégrale, on a calculé un grand nombre de valeurs intermédiaires qui permettent en fait de calculer les valeurs approchées de $\displaystyle\int_a^{x_k} g(t)\mathrm{d}t$.
Comme on souhaite définir une approximation d'une fonction, nous allons simplement définir une suite de valeurs approchées de $f(t)$ en des valeurs de t fixées.

2. Plus généralement sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1. On définit une liste $T = [T_0, T_1, \ldots, T_N]$ avec $t_0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_N = t_1$,
2. On cherche une suite finie de valeurs Y_0, Y_1, Y_2, …, Y_{N-1}, Y_N telles que Y_k est une valeur approchée de $f(T_k)$

Remarques

1. Le plus souvent la suite des valeurs de t sera régulièrement espacée : on définit $h = \frac{t_1 - t_0}{N}$ et $T_k = t_0 + kh$.
2. Les suites T et Y permettent, par exemple, de visualiser le graphe de la solution. Cela correspond à approcher la fonction par la fonction affine sur chaque intervalle $[T_k; T_{k+1}]$ qui prend la valeur Y_k en T_k.

Pour définir la suite Y à partie de T, y_0 et φ nous allons procéder par étapes.

1. On remplace l'équation différentielle par une équation intégrale
   $f(T_{k+1}) = f(T_k) + \displaystyle\int_{T_k}^{T_{k+1}} f'(t)dt = f(T_k) + \int_{T_k}^{T_{k+1}} \varphi\big(f(t), t\big)\mathrm{d}t.$
2. On calcule, pour chaque intégrale, une valeur approchée $\displaystyle\int_{T_k}^{T_{k+1}} \varphi\big(f(t), t\big)dt \simeq \delta_k$.
3. On définit $Y_0 = y_0$ et $Y_{k+1} = Y_k + \delta_k$ pour $0 \leqslant k < N$.

Les différentes méthodes correspondent à des algorithmes d'approximation d'une intégrale.

2 Quelques méthodes

Nous utiliserons une fonction φ qui devra être définie comme une fonction Python. Les fonctions de calcul de solution utiliseront une fonction comme paramètre (c'est possible avec Python).

Exemple : l'équation $\tau y'(t) + y(t) = Ke_0$ soit : $y'(t) = \frac{Ke_0 - y(t)}{\tau}$ pourra s'écrire

```
def phi(y,t):
    return (y - K*e0)/tau
```

- On remarquera que les variables sont `y` suivie de `t` ; c'est la convention prise dans les modules qu'on utilisera parfois, en particulier `scipy.integrate`.
- Il arrivera très souvent dans les équations qui seront utilisées que la variable t n'apparaisse pas explicitement dans φ, comme ici. Il faudra néanmoins introduire t comme paramètre.
- Dans l'écriture ci-dessus on a supposé que les constantes K, e_0 et τ ont été définies par des variables globales (`K`, `e0` et `tau`).

2.1 Méthode d'Euler explicite

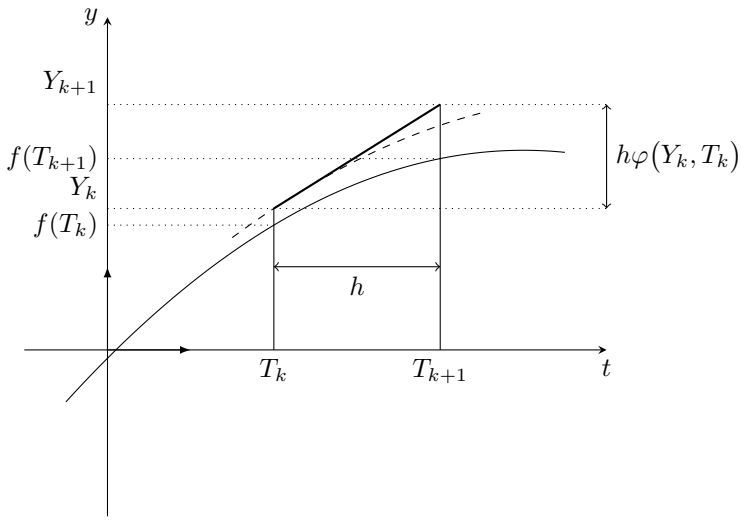
On peut approcher une intégrale par la valeur de la fonction à l'origine :

$$\int_a^b g(t)dt \simeq \int_a^b g(a)dt = (b-a)g(a)$$

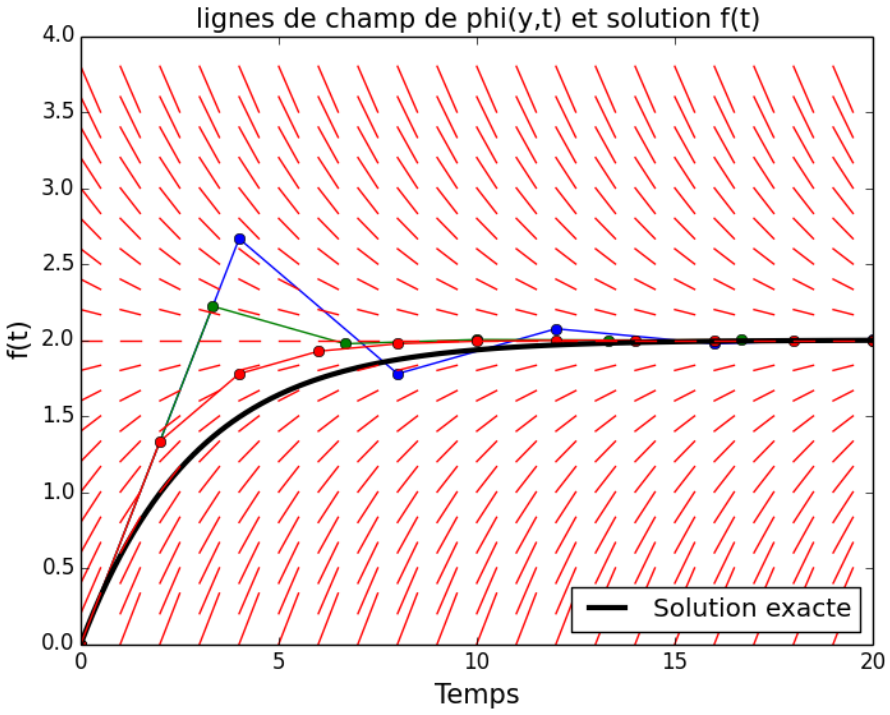
On obtient $\displaystyle\int_{T_k}^{T_{k+1}} \varphi\big(f(t), t\big)dt \simeq (T_{k+1} - T_k)\varphi\big(f(T_k), T_k\big)$.

Or on connaît une valeur approchée de $f(T_k)$, c'est Y_k. Ainsi on aboutit à

$$\int_{T_k}^{T_{k+1}} \varphi\big(f(t), t\big)dt \simeq (T_{k+1} - T_k)\varphi\big(Y_k, T_k\big) \text{ d'où } Y_{k+1} = Y_k + (T_{k+1} - T_k)\varphi\big(Y_k, T_k\big)$$



On peut remarquer que $x \mapsto Y_k + (x - T_k)\varphi(Y_k, T_k)$ est l'équation de la tangente en (T_k, Y_k) de la solution de condition initiales T_k et Y_k.
La méthode revient à suivre la tangente des solutions sur des intervalles $[T_k; T_{k+1}]$.
On approche donc la solution par une fonction affine sur chaque intervalle.



Se pose alors la question de la liste des T_k :

- la calcule-t-on en même temps que celle des Y_k ?
- on doit-elle être donnée comme paramètre ?

Les fonctions des bibliothèques ont choisi la seconde réponse : nous allons utiliser la même convention.

Programme XIV.1 – Euler explicite

```
1  def euler(f, y0, T):
2      """Entree : une fonction f de 2 variables
3                  un reel y0, la condition initiale en t0
```

```
4                une liste de réels, monotone, dont le premier
                    terme est t0
5        Sortie : une liste de  points définissant
6                   une solution approchee de y' = f(y, t)
7                   avec les conditions initiales (t0,y0)
8                   y(T[i]) est approché par Y[i]"""
9      n = len(T)            # n valeurs à calculer
10     Y = [0]*n             # création de la liste
11     Y[0] = [y0]           # ordonnee initiale
12     for k in range(n-1): # il reste (n-1) points à trouver
13         pas = T[k+1] - T[k]
14         pente = f(Y[k],T[k])
15         Y[k+1] = Y[k] + pas*pente # On applique la formule
16     return Y
```

On notera qu'on ne suppose pas que le pas de la liste des temps est constant donc on le calcule à chaque étape.

2.2 Justification

Il reste à prouver que le procédé calcule bien une approximation de la solution : c'est un résultat mathématique qui n'est pas facile à démontrer. Nous allons nous contenter de donner des arguments dans deux cas particuliers en ne considérant que la convergence de la valeur trouvée en t_1.

Primitive

Si $\varphi(y,t) = u(t)$, l'équation intégrale devient $y(t_1) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} u(t)dt$: on cherche à calculer l'intégrale de u. Or la méthode revient à calculer $Y_N = y_0 + h\sum_{k=0}^{N-1} u\left(t_0 + kh\right)$ avec $h = \frac{t_1-t_0}{N}$, c'est-à-dire une somme de Riemann dont on sait qu'elle approchait bien l'intégrale

Exponentielle

Dans le cas $\varphi(y,t) = y$ avec $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ et y_0 la solution de $y' = y$ avec $y'(0) = 1$ est $y(t) = \exp(t)$.
La récurrence s'écrit $Y_{k+1} = Y_k + \frac{1-0}{N}u(T_k, Y_k) = Y_k + \frac{Y_k}{N} = Y_k\left(1 + \frac{1}{N}\right)$ d'où,
comme $Y_0 = y_0 = 1$, $Y_k = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^k$ puis $Y_n = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$ dont la limite est e.
On trouve bien que la limite de la valeur approchée en 1 est exp(1).

2.3 Méthode d'Euler implicite

Si on approche la fonction à intégrer, $\varphi\big(f(u),u\big)$, par sa valeur finale sur l'intervalle $[T_k;T_{k+1}]$ c'est-à-dire $\varphi\big(f(u),u\big) \simeq \varphi\big(f(T_{k+1}),T_{k+1}\big) \simeq \varphi\big(Y_{k+1},T_{k+1}\big)$ on obtient

$$Y_{k+1} = Y_k + \int_{T_k}^{T_{k+1}} \varphi\big(Y_{k+1},T_{k+1}\big)du \simeq Y_k + (T_{k+1} - T_k)\varphi\big(Y_{k+1},T_{k+1}\big)$$

On voit que Y_{k+1} apparaît aussi dans le second membre : il est défini implicitement c'est-à-dire qu'on ne peut pas le calculer directement.
Pour déterminer Y_{k+1} en fonction de Y_k il faut donc résoudre, à chaque étape, l'équation $g_k(y) = 0$ avec $g_k(y) = y - Y_k - (T_{k+1} - T_k)\varphi(y,T_{k+1})$.
On peut, par exemple, en déterminer une valeur approchée avec des méthodes d'analyse numérique comme celle de Newton.

Parfois on peut résoudre directement l'équation. Par exemple si on veut résoudre l'équation différentielle $y' = y^2 + t^2$ pour $y(t_0) = y_0$ sur $[t_0;t_1]$ par la méthode d'Euler implicite, on doit doit calculer les Y_k avec Y_0 et $Y_{k+1} = Y_k + h\big(Y_{k+1}^2 + T_{k+1}^2\big)$ où h est le pas supposé constant.

Ainsi Y_{k+1} est solution de $hX^2 - X + \left(Y_k + hT_{k+1}^2\right) = 0$.

Les racines sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4hY_k - 4h^2T_{k+1}^2}}{2h}$; on choisit celle qui est proche de Y_k

$$Y_{k+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4hY_k - 4h^2T_{k+1}^2}}{2h}$$

```
def solution_particuliere(y0, T):
    n = len(T)
    Y = [0]*n
    Y[0] = y0
    for k in range(n-1):
        delta = 1 - 4*h*(Y[k]+h*T[k+1]**2)
        Y[k+1] = (1-delta**(1/2))/(2*h)
    return Y
```

Sans rentrer dans la théorie, on peut retenir que la méthode implicite est souvent moins précise et plus compliquée à utiliser mais elle est plus stable que la méthode explicite, elle diverge moins rapidement. Pour simplifier grossièrement : la méthode implicite est moins précise à court terme mais plus précise à long terme.

Utilisation de la méthode de Newton.

On rappelle la méthode de Newton

```
def newton(f, df, x0, epsilon = 1e-8):
    h = 1 + epsilon
    x = x0
    while h > epsilon:
        x_old = x
        x = x - f(x)/df(x)
        h = abs(x - x_old)
    return x
```

L'équation à résoudre est $f(y) = y - Y_k - (T_{k+1} - T_k)\varphi(y, T_{k+1}) = 0$.

On a $f'(y) = 1 - (T_{k+1} - T_k)\dfrac{\partial\varphi(y, T_{k+1})}{\partial y}$: il faudra donc définir aussi la fonction python associée à la dérivée partielle.

Par exemple pour $y' = \dfrac{\sin(y)}{t^2 + 0.0001}$ on écrit

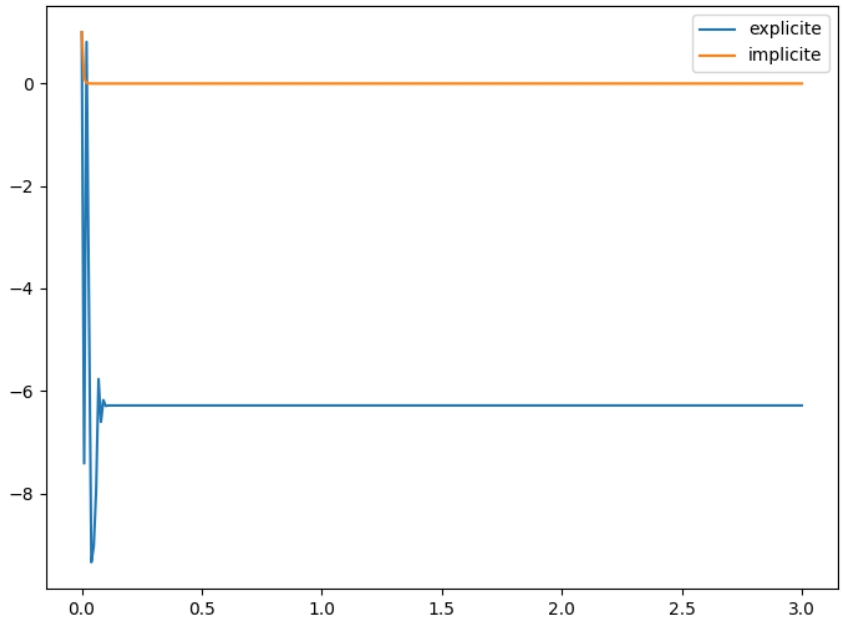
```
def phi(y, t):
    return -sin(y)/(t**2+0.001)

def dphi(y, t):
    return -cos(y)/(t**2+0.001)
```

La fonction a été choisie pour mettre en évidence l'amélioration de la stabilité par la méthode implicite. La solution attendue est celle fournie par la méthode implicite.

Les fonctions g et g' dépendent des valeurs calculées T_{k+1} et Y_k : on les définira à l'intérieur de la fonction de résolution, cela est possible dans python.
On prendra Y_k pour valeur initiale de la recherche, c'est une valeur proche de Y_{k+1}.

Programme XIV.2 – Euler implicite

```
1  def euler_imp(phi, dphi, y0, T):
2      n = len(T)
3      Y = [0]*n
4      Y[0] = [y0]
5      for k in range(N-1):
6          def f(y):
7              return y - Y[i] - pas*phi(y, T[k+1])
8          def df(y):
9              return 1 - pas*dphi(y, T[k+1])
10         Y[k+1] = newton(f, df, Y[k])
11     return Y
```



2.4 Utilisations du module `scipy`

2.5 odeint

Le module `scipy` contient, dans la sous-bibliothèque `integrate` une fonction `odeint` qui résout efficacement les équations différentielles. C'est la méthode à utiliser quand la résolution d'une équation est un outil d'un projet plus large.

```
from scipy.integrate import odeint

odeint(phi,y0,T)
```

2.6 fsolve

Dans le cas de la méthode d'Euler implicite la résolution de l'équation implicite peut se faire avec la fonction `fsolve` (voir **XIII.3**).
L'usage des paramètres envoyés permet de ne définir qu'une seule fois une fonction.

Programme XIV.3 – Euler implicite avec `fsolve`

```
1  from scipy.optimize import fsolve
2
3  def euler_imp(phi, y0, T):
4      def equ(y, y_old, t):
5          return y - y_old - pas*phi(y_old, t)
6      n = len(T)
7      Y = [0]*n
8      Y[0] = [y0]
9      for k in range(N-1):
10         Y[k+1] = fsolve(equ, Y[k], args = (Y[k], T[k]))
11     return Y
```